VISIT…

LANZAROTE
Caliente.COM

АКАДЕМИЯ НАУК СОЮЗА ССР

КЛАССИКИ НАУКИ



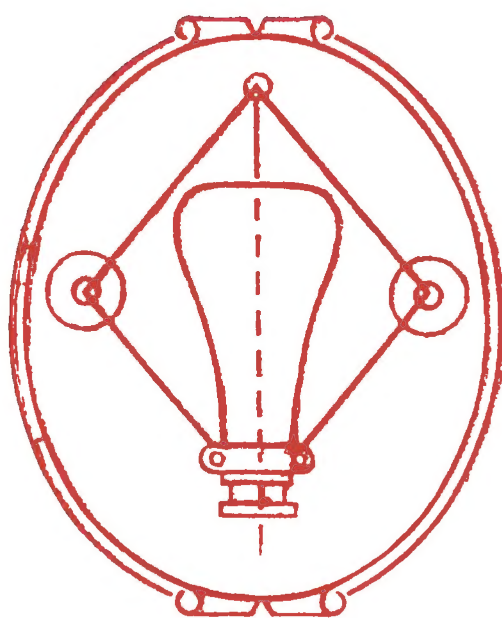
Д. К. МАКСВЕЛЛ.
И. А. ВЫШНЕГРАДСКИЙ. А. СТОДОЛА

ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

(ЛИНЕАРИЗОВАННЫЕ ЗАДАЧИ)



РЕДАКЦИЯ И КОММЕНТАРИИ
АКАДЕМИКА А. А. АНДРОНОВА
И ЧЛЕНА-КОРРЕСПОНДЕНТА АН СССР
И. Н. ВОЗНЕСЕНСКОГО



ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
1949

Под общей редакцией Комиссии Академии Наук СССР
по изданию научно-популярной литературы

Председатель Комиссии президент Академии Наук СССР
академик *С. И. ВАВИЛОВ*

Зам. председателя член-корреспондент Академии Наук СССР
П. Ф. ЮДИН


Д. К. МАКСВЕЛЛ

Д. К. МАКСВЕЛЛ



О РЕГУЛЯТОРАХ



Д. К. МАКСВЕЛЛ

О РЕГУЛЯТОРАХ

J. C. Maxwell, On Governors
The Proceedings of the Royal Society
№ 100, 1868, стр. 105—120



О РЕГУЛЯТОРАХ



Регулятор есть часть машины, посредством которой скорость машины поддерживается почти постоянной, несмотря на изменения движущего момента или момента сопротивлений.

В большинстве регулирующих устройств используется центробежная сила детали, связанной с валом машины. Когда скорость возрастает, эта сила увеличивается, и тогда или возрастает давление детали на некоторую поверхность или эта сила двигает деталь и таким образом действует на тормоз или клапан.

В одном типе регулирующих устройств, который мы назовем *модераторами* *, сопротивление возрастает со скоростью.[1] Так, в некоторых конструкциях часовых механизмов модератор состоит из конического маятника, вращающегося внутри круглого корпуса часов. Когда скорость возрастает, шар маятника давит на внутренность корпуса и трение ограничивает возрастание скорости.[2]

В регулирующем устройстве Уатта для паровых машин плечи конического маятника расходятся, в результате чего уменьшается проходное сечение парового клапана.

---

* См. C. W. Siemens. On Uniform Rotation, Phil. Trans., 1866, стр. 657.

В водяном тормозе, изобретенном проф. Дж. Томсоном (J. Thomson), при увеличении скорости вода выкачивается центробежной силой и выливается наружу со значительной скоростью, так что работа затрачивается на подъем и сообщение этой скорости воде.

Во всех этих механизмах возрастание движущего момента[3] влечет за собой увеличение скорости, однако значительно меньше того увеличения, которое происходило бы без модератора.

Но если такая деталь, приводимая в действие центробежной силой, вместо прямого воздействия на машину будет приводить в движение механизм, который непрерывно увеличивает сопротивление до тех пор, пока скорость оказывается больше нормального значения, и производит обратное действие, когда скорость меньше этого значения, то регулятор будет приводить скорость к одному и тому же нормальному значению, каковы бы ни были изменения (в рабочих пределах машины) действующей силы или нагрузки.

В этой работе я предполагаю направить внимание инженеров и математиков на динамическую теорию таких регуляторов, не входя в какие-либо детали, касающиеся их конструкции.

Будет показано, что движение машины с регулятором, вообще говоря, складывается из равномерного вращения и из возмущения, которое может быть представлено в виде суммы нескольких компонентов. Эти компоненты могут быть четырех различных типов:

1) возмущение может непрерывно возрастать;

2) оно может непрерывно убывать;

3) оно может быть колебательным с непрерывно возрастающей амплитудой;

4) оно может быть колебательным с непрерывно убывающей амплитудой.

Первый и третий случаи, очевидно, не совместимы с устойчивостью движения, и только второй и четвертый допустимы

при наличии хорошего регулятора. Это условие математически эквивалентно условию, что все действительные корни и все действительные части комплексных корней некоторого уравнения отрицательны.

Я не в состоянии определить полностью эти условия для уравнений выше третьей степени, но я надеюсь, что эта проблема привлечет внимание математиков.

Действительные движения, соответствующие комплексным корням, обычно, не принимаются во внимание изобретателями регулирующих устройств,[4] так как изобретатели естественно ограничивают свое внимание только теми процессами, для которых они *предназначают* свои механизмы и которым обычно соответствует действительный корень уравнения. Если перестановкой соответствующих приспособлений увеличивать регулирующее воздействие, то, вообще говоря, существует граница, после которой возмущение вместо того, чтобы скорее затухать, порождает колебательное и дергающее движение, нарастающее до тех пор, пока не будет достигнут предел действия регулятора. Это имеет место тогда, когда действительная часть комплексных корней становится положительной.

Математическое исследование движения регуляторов можно сделать практически полезным, если извлечь из него указания о средствах против таких нарастающих возмущений.

Ситуация, о которой идет речь, фактически имеет место в сконструированном Флемингом Дженкином регуляторе, снабженном приспособлением, посредством которого можно изменять его регулирующее воздействие. При перестановке этого приспособления регулирование может быть сделано все более и более быстрым до тех пор, пока, наконец, качания регулятора, сопровождаемые резко неравномерным ходом главного вала, не покажут, что системе соответствует уравнение, изменившее знак действительной части комплексных корней.

Я буду рассматривать три рода регуляторов, соответствующих трем родам модераторов, о которых уже говорилось.[5]

В регуляторах первого рода центробежный элемент находится на постоянном расстоянии от оси вращения, но его давление на поверхность тела, которой он касается, изменяется с изменением скорости. В *модераторах* это трение само является замедляющей силой. В *регуляторах* это тело делается движущимся вокруг оси и сила трения стремится вращать его: это движение создается для того, чтобы действовать на тормоз (или заслонку) с целью замедлить ход машины. Постоянная сила действует на это подвижное тело в направлении, противоположном направлению силы трения. Она прекращает торможение, когда сила трения оказывается меньше заданной величины.

Регулятор Дженкина основан на этом принципе. Он имеет то преимущество, что центробежный элемент не изменяет своего расстояния от оси вращения и что его давление всегда является одной и той же функцией скорости. Он обладает тем неудобством, что нормальная скорость зависит в некоторой степени от коэффициента трения скольжения между двумя поверхностями, которые не могут быть поставлены всегда в одни и те же условия.[6]

В регуляторах второго рода центробежный элемент может свободно удаляться от оси, но сдерживается силой, величина которой изменяется в зависимости от положения центробежного элемента и притом так, что если скорость вращения имеет нормальное значение, то центробежный элемент будет в равновесии в любом положении. Если же эта скорость станет больше или меньше нормальной, то центробежный элемент будет подниматься или опускаться беспрепятственно до упоров. Но заслонка устроена так, что ее перемещение обеспечивает бо́льшую или меньшую мощность, в зависимости от расстояния центробежного элемента от оси, и таким образом колебания центробежного элемента ограничиваются узкими пределами.[7]

На этом принципе были построены регуляторы В. Томсона W. Thomson) и Фуко (M. Foucault). В первом силой, сдержи-

вающей движение центробежного элемента, является сила пружины, действующей между одной из точек центробежного элемента и некоторой точкой закрепления, находящейся на значительном расстоянии от него, а торможение достигается фрикционным тормозом, действие которого зависит от реакции пружины на эту точку закрепления.

В системе Фуко сила, приложенная к центробежному элементу, складывается из веса шаров, направленного вниз, и силы, направленной вверх и порождаемой некоторыми грузамм, стремящимися поднять шары посредством системы рычагов. Результирующая вертикальная сила, действующая на шары, пропорциональна высоте их опускания относительно центра вращения, что обеспечивает постоянную равновесную скорость.[8] Тормозом здесь являются: во-первых, переменное трение между системой рычагов и кольцом на валу, посредством которого передается сила, и, во-вторых, центробежный вентилятор, через который пропускается то или иное количество воздуха, в зависимости от положения рычагов. Оба эти устройства обеспечивают воздействие на скорость по одному и тому же закону.

Регуляторы, сконструированные Королевским астрономом на основе принципа Сименса для хронографа и экваториала Гринвичской обсерватории, основаны на близкой идее. Центробежным элементом здесь является длинный конический маятник, вращающийся вокруг вертикальной оси; он предохраняется от большого отклонения от фиксированного угла посредством того, что действующий на него крутящий момент поддерживается приблизительно постоянным при помощи дифференциальной передачи. Маятник тормозится крыльчаткой, которая погружается на бо̀льшую или меньшую глубину в жидкость, в зависимости от угла между маятником и вертикалью. Торможение главного вала осуществляется водилом дифференциальной передачи, а плавность движения главного вала обеспечивается маховым колесом.[9]

В регуляторах третьего рода жидкость выкачивается снизу вверх и разбрасывается по сторонам вращающегося сосуда. В регуляторах, основанных на этом принципе, описанных К. В. Сименсом (C. W. Simens), сосуд соединен со своей осью посредством винта и пружины таким образом, что если ось опережает сосуд, то сосуд опускается и вверх выкачивается больше жидкости. Если это приспособление можно было бы сделать совершенным, то нормальная скорость сосуда оставалась бы одной и той же в широком диапазоне изменения движущей силы.

Исследования показывают, что колебательные движения можно гасить посредством сил сопротивления. В некоторых случаях это можно сделать посредством соединения колеблющегося тела с телом, подвешенным в вязкой жидкости, так что при колебаниях тело поднимается и опускается в жидкости. Чтобы умерить изменения движения вращающегося вала, к нему может быть присоединен сосуд, наполненный вязкой жидкостью. Он не будет влиять на равномерное вращение, но будет препятствовать всякому периодическому изменению скорости.

Подобные же эффекты имеют место благодаря вязкости смазочного материала в скользящих частях машины и вследствие наличия других неизбежных сопротивлений; поэтому не всегда необходимо вводить специальные механизмы для гашения колебаний.

Все такие сопротивления, если они будут приблизительно пропорциональны скорости, я буду называть силами вязкости, независимо от их происхождения.

В некоторых механизмах между машиной и регулятором вводится дифференциальная зубчатая передача, так что момент, действующий на регулятор, является приблизительно постоянным. Я обращаю внимание на то, что в этом случае, при определенных условиях, внезапное возмущение машины не действует посредством дифференциальной передачи на регуля-

тор или обратно.[10] Когда эти условия выполняются, уравнения движения оказываются не только простыми, но и само движение не подвергается возмущениям, зависящим от взаимодействия между машиной и регулятором.[11]

РАЗЛИЧИЕ МЕЖДУ МОДЕРАТОРОМ И РЕГУЛЯТОРОМ

Пусть в регулирующих устройствах первого типа P будет движущим моментом, R — моментом сопротивления (оба приведены к валу машины), V — нормальной скоростью, заданной для того же самого вала, $\frac{dx}{dt}$ — его действительной скоростью и M — моментом инерции всей машины, приведенной к этому валу.

Пусть это регулирующее устройство выполнено так, что увеличению момента сопротивления или уменьшению движущего момента противодействует момент $F\left(\frac{dx}{dt}-V\right)$, где F — постоянная. Уравнением движения тогда будет:

$$\frac{d}{dt}\left(M\frac{dx}{dt}\right)=P-R-F\left(\frac{dx}{dt}-V\right). \tag{1}$$

Когда машина достигнет установившейся скорости, левая часть исчезнет, и мы будем иметь:

$$\frac{dx}{dt}=V+\frac{P-R}{F}. \tag{2}$$

Следовательно, величина установившейся скорости непрерывно возрастает с ростом P или уменьшением R. Регулирующие устройства этого типа, как заметил Сименс*, следует назвать скорее модераторами, чем регуляторами. У регулирующих

* On Uniform Rotation, Phil. Trans., 1866, стр , 657.

устройств второго типа момент $F\left(\frac{dx}{dt} - V\right)$, вместо того, чтобы быть приложенным непосредственно к машине, приложен к независимо движущемуся телу B, которое увеличивает момент сопротивлений или уменьшает действующий момент на величину, зависящую от суммарного перемещения тела B.

Если y представляет перемещение тела B, то уравнением движения B будет:

$$\frac{d}{dt}\left(B\frac{dy}{dt}\right) = F\left(\frac{dx}{dt} - V\right) \tag{3}$$

и уравнением движения M будет:

$$\frac{d}{dt}\left(M\frac{dx}{dt}\right) = P - R - F\left(\frac{dx}{dt} - V\right) + Gy, \tag{4}$$

где G — тормозящий момент, порождаемый телом B, когда B перемещается на единицу пути.[12]

Первое из этих уравнений мы можем сразу же проинтегрировать и найти:

$$B\frac{dy}{dt} = F(x - Vt), \tag{5}$$

так что если регулятор пришел в состояние покоя, то $x = Vt$, и, следовательно, не только скорость машины равна нормальной скорости, но и суммарный угол поворота вала машины является таким, как и при отсутствии изменений во вращающем моменте или в моменте сопротивления.

Регулятор Дженкина. В регуляторе этого рода, изобретенном Флемингом Дженкином и применяемом при электрических опытах, центробежный элемент вращается вокруг главной оси и всегда удерживается под постоянным углом, так как его грузы скользят по внутренней поверхности кольца B, которое свободно посажено на ту же ось. Давление на это кольцо будет пропорционально квадрату скорости, но

постоянная составляющая этого давления уничтожается пружиной, действующей на центробежный элемент.[13] Сила, действующая на B и вращающая его, равна

$$F'\left[\frac{dx}{dt}\right]^2 - C'.$$

Если учесть, что скорость изменяется в очень узких пределах, то можно написать:

$$F\left(\frac{dx}{dt} - V_1\right),$$

где F является новой постоянной и V_1 есть нижний предел скорости, начиная от которой вступает в действие регулятор.[14]

Так как эта сила всегда действует на B в положительном направлении и так как необходимо, чтобы тормоз (или заслонка) действовал то сильнее, то слабее, груз весом W соединен с B и стремится вращать его в отрицательном направлении. По соображениям, о которых будет речь ниже, этот груз подвешивается в вязкой жидкости для того, чтобы он быстро приходил в состояние покоя.[15]

Уравнение движения B тогда можно будет написать в виде:

$$B\frac{d^2y}{dt^2} = F\left(\frac{dx}{dt} - V_1\right) - Y\frac{dy}{dt} - W, \tag{6}$$

где Y является коэффициентом, зависящим от вязкости жидкости и других сопротивлений, изменяющихся вместе со скоростью, а W — постоянный вес груза.

Интегрируя это уравнение по t, найдем:

$$B\frac{dy}{dt} = F(x - V_1 t) - Yy - Wt. \tag{7}$$

Если B приходит в состояние покоя, то мы будем иметь:

$$x = \left(V_1 + \frac{W}{F}\right)t + \frac{Y}{F}y. \tag{8}$$

Угол поворота машины зависит от положения регулятора, но окончательная скорость постоянна и равна

$$V_1 + \frac{W}{F} = V, \tag{9}$$

т. е. V — так называемая нормальная скорость.

Уравнением движения самой машины будет

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = P - R - F\left(\frac{dx}{dt} - V_1\right) - Gy. \tag{10}$$

Решая это уравнение совместно с (7), можно определить движение всего устройства. Решение будет иметь вид:

$$x = A_1 e^{n_1 t} + A_2 e^{n_2 t} + A_3 e^{n_3 t} + Vt, \tag{11}$$

где n_1, n_2, n_3 — корни кубического уравнения:[16]

$$MBn^3 + (MY + FB)n^2 + FYn + FG = 0. \tag{12}$$

Если n будет парой корней этого уравнения вида $a \pm \sqrt{-1}\,b$, то тогда та часть x, которая соответствует этим корням, будет иметь вид:

$$e^{at}\cos(bt + \beta).$$

Знак минус у a укажет на наличие колебаний, амплитуда которых непрерывно убывает. Если a равно нулю, то амплитуда остается постоянной, при a положительном амплитуда будет непрерывно возрастать.

Одним из корней уравнения (12) будет, очевидно, вещественное отрицательное число.[17] Условием того, что вещественная часть других корней будет отрицательной, является соотношение

$$\left(\frac{F}{M}+\frac{Y}{B}\right)\frac{Y}{B}-\frac{G}{B}>0.$$

Оно является условием устойчивости движения. Если это условие не выполнено, то мы будем иметь раскачивание регулятора, которое будет возрастать до тех пор, пока регулятор достигнет упоров. Для того чтобы обеспечить эту устойчивость, величина Y должна быть сделана достаточно большой по сравнению с G путем помещения груза W в вязкую жидкость, если вязкость смазочного материала недостаточна.

Для определения величины F надо отъединить тормоз от кольца и закрепить кольцо; тогда, если V и V' являются скоростями (когда движущими моментами являются P и P'), то

$$F=\frac{P-P'}{V-V'}.$$

Для того чтобы определить G, допустим, что регулятор действует, и пусть y и y' являются положениями тормоза (когда движущими моментами являются P и P'), тогда:[18]

$$G=\frac{P-P'}{y-y'}.$$

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ХРОНОМЕТРИЧЕСКИХ ЦЕНТРОБЕЖНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Регуляторы В. Томсона и М. Фуко.[19] Пусть A есть приведенный момент инерции движущихся частей машины и θ — их угол поворота. Уравнением движения будет:

$$\frac{d}{dt}\left(A\frac{d\theta}{dt}\right)=L, \tag{1}$$

где L — момент внешних сил относительно оси вращения.

Пусть далее A является функцией другой переменной ϕ (отклонения центробежного элемента), так что кинетическая энергия всей системы равна

$$\frac{1}{2} A \left[\frac{d\theta}{dt}\right]^2 + \frac{1}{2} B \left[\frac{d\varnothing}{dt}\right]^2,$$

где B может быть также функцией от $\varnothing$, если центробежный элемент сложен.

Если принять также, что P — потенциальная энергия регулятора — является функцией от $\varnothing$, тогда сила, стремящаяся *уменьшить* $\varnothing$, возникающая от действия тяжести, пружин и т. п., будет равна $\frac{dP}{d\varnothing}$.

Полная энергия — кинетическая и потенциальная — равна:

$$E = \frac{1}{2} A \left[\frac{d\theta}{dt}\right]^2 + \frac{1}{2} B \left[\frac{d\varnothing}{dt}\right]^2 + P = \int L d\theta. \tag{2}$$

Дифференцируя по t и используя уравнение (1), найдем:

$$\frac{d\varnothing}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{dA}{d\varnothing}\left[\frac{d\theta}{dt}\right]^2 + \frac{1}{2}\frac{dB}{d\varnothing}\left[\frac{d\varnothing}{dt}\right]^2 + \frac{dP}{d\varnothing}\right) + A\frac{d\theta}{dt}\frac{d^2\theta}{dt^2} +$$

$$+ B\frac{d\varnothing}{dt}\frac{d^2\varnothing}{dt^2} = L\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\left(\frac{dA}{d\varnothing}\frac{d\theta}{dt}\frac{d\varnothing}{dt} + A\frac{d^2\theta}{dt^2}\right), \tag{3}$$

откуда, исключив L, получим:

$$\frac{d}{dt}\left(B\frac{d\varnothing}{dt}\right) = \frac{1}{2}\frac{dA}{d\varnothing}\left[\frac{d\theta}{dt}\right]^2 + \frac{1}{2}\frac{dB}{d\varnothing}\left[\frac{d\varnothing}{dt}\right]^2 - \frac{dP}{d\varnothing}. \tag{4}$$

Первые два члена в правой части означают силу, стремящуюся увеличивать $\varnothing$ и зависящую от квадратов скоростей главного вала и центробежного элемента. Сила, выраженная этими членами, может быть названа центробежной силой.

Если аппарат устроен так, что [20]

$$P = \frac{1}{2} A\,\omega^2 + \text{const}, \tag{5}$$

где ω — постоянная скорость, то это уравнение примет вид:

$$\frac{d}{dt}\left(B\frac{d\varnothing}{dt}\right) = \frac{1}{2}\frac{dA}{d\varnothing}\left(\left[\frac{d\theta}{dt}\right]^2 - \omega^2\right) + \frac{1}{2}\frac{dB}{d\varnothing}\left[\frac{d\varnothing}{dt}\right]^2. \tag{6}$$

В этом случае значение $\varnothing$ не может оставаться постоянным, если только угловая скорость не будет равна ω.

Вал с центробежным элементом, устроенным на основе этого принципа, может иметь только одну установившуюся скорость вращения. Если возмущения θ и $\varnothing$ малы, то уравнения для них можно написать так:

$$A\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{dA}{d\varnothing}\omega\frac{d\varnothing}{dt}=L, \tag{7}$$

$$B\frac{d^2\varnothing}{dt^2}-\frac{dA}{d\varnothing}\omega\frac{d\theta}{dt}=0. \tag{8}$$

Отношение периода при таких малых возмущениях к числу оборотов вала равно $\frac{dA}{d\varnothing}(AB)^{-\frac{1}{2}}$.

Они не будут ни возрастать, ни убывать, если в уравнениях нет других членов.

Чтобы превратить это устройство в регулятор, нужно учесть наличие вязких сопротивлений X и Y соответственно при движении основного вала и центробежного элемента регулятора и, наконец, наличие члена $G\varnothing$, выражающего действие тормоза в уравнении машины.[21] Полагая $\frac{dA}{d\varnothing}\omega=K$, перепишем уравнения так:

$$A\frac{d^2\theta}{dt^2}+X\frac{d\theta}{dt}+K\frac{d\varnothing}{dt}+G\varnothing=L. \tag{9}$$

$$B\frac{d^2\varnothing}{dt^2}+Y\frac{d\varnothing}{dt}-K\frac{d\theta}{dt}=0. \tag{10}$$

Условие устойчивости, указываемое этими уравнениями, состоит в том, что действительные корни и действительные части комплексных корней кубического уравнения

$$ABn^3+(AY+BX)n^2+(XY+K^2)n+GK=0 \tag{11}$$

являются отрицательными. Этим условием будет:

$$\left(\frac{X}{A}+\frac{Y}{B}\right)(XY+K^2)>GK. \tag{12}$$

Комбинация регуляторов. Если тормоз регулятора Томсона действует на подвижное кольцо, как в регуляторе Дженкина, и если это кольцо действует на паровой клапан или на более мощный тормоз, то нам надлежит рассматривать движение трех тел. Не входя в решение общих уравнений движения, мы можем ограничиться случаем малых отклонений и написать уравнения:

$$\left.\begin{aligned} &A\frac{d^2\theta}{dt^2}+X\frac{d\theta}{dt}+K\frac{d\varnothing}{dt}+T\varnothing+I\psi=P-R,\\ &B\frac{d^2\varnothing}{dt^2}+Y\frac{d\varnothing}{dt}-K\frac{d\theta}{dt}=0,\\ &C\frac{d^2\psi}{dt^2}+Z\frac{d\psi}{dt}-T\dot{\varnothing}=0, \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

где $\theta, \varnothing, \psi$ — отклонения углов главного вала, центробежного элемента и подвижного кольца. Соответственно, A, B, C — их моменты инерции; X, Y, Z — величины вязких трений в соответствующих сочленениях. K — то, что первоначально мы обозначали через $\frac{dA}{d\varnothing}\omega$, а T и I — коэффициенты, характеризующие эффективность тормозов Томсона и Дженкина.

Характеристическим уравнением будет:

$$\begin{vmatrix} An^2+Xn & Kn+T & I \\ -K & Bn+Y & 0 \\ 0 & -T & Cn^2+Zn \end{vmatrix}=0 \tag{14}$$

или

$$n^5+n^4\left(\frac{X}{A}+\frac{Y}{B}+\frac{Z}{C}\right)+n^3\left[\frac{XYZ}{ABC}\left(\frac{A}{X}+\frac{B}{Y}+\frac{C}{Z}\right)+\frac{K^2}{AB}\right]+$$
$$+n^2\left(\frac{XYZ+KTC+K^2Z}{ABC}\right)+n\frac{KTZ}{ABC}+\frac{KTI}{ABC}=0. \tag{15}$$

Я не достиг успеха в деле полного определения условий устойчивости движения из этого уравнения, но я нашел два

необходимых условия, которые фактически являются условиями устойчивости двух регуляторов, взятых отдельно. Если напишем уравнение

$$n^5 + pn^4 + qn^3 + rn^2 + sn + t = 0, \tag{16}$$

тогда для того, чтобы вещественные части всех этих корней были отрицательными, необходимо, чтобы:

$$pq > r \quad \text{и} \quad ps > t. \tag{17}$$

Я не в состоянии показать, что эти условия являются достаточными. Такой компаунд-регулятор был построен и использован.[22]

О ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ В ТРУБКЕ, ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ВОКРУГ ВЕРТИКАЛЬНОЙ ОСИ

Жидкостный регулятор К. В. Сименса.[23] Пусть ρ плотность жидкости; k — площадь сечения трубки в той точке, расстояние которой от начала, измеренное вдоль трубки, есть s; r, θ, z — координаты этой точки, отнесенные к осям, неподвижным относительно трубки; Q — объем жидкости, проходящей через какое-нибудь сечение в единицу времени. Пусть также A, B, C обозначают следующие интегралы, взятые по всей трубке:

$$\int \rho k r^2 ds = A, \qquad \int \rho r^2 d\theta = B, \qquad \int \rho \frac{1}{k} ds = C. \tag{1}$$

Нижний конец трубки пусть будет на оси вращения.

Пусть $\varnothing$ — угол, определяющий положение трубки относительно вертикальной оси. Тогда момент количества движения жидкости в трубке равен[24]

$$H = A\frac{d\varnothing}{dt} + BQ. \tag{2}$$

Моментом количества движения жидкости, выбрасываемой из трубки в единицу времени, будет[25]

$$\frac{dH'}{dt} = \rho r^2 Q \frac{d\varnothing}{dt} + \rho \frac{r}{k} Q^2 \cos\alpha, \tag{3}$$

где r — радиус у отверстия, k — площадь сечения отверстия и α — угол между направлением трубки у этого сечения и направлением движения.[26]

Энергия движения жидкости, находящейся в трубке, равна[27]

$$W = \frac{1}{2} A \left[\frac{d\varnothing}{dt}\right]^2 + BQ \frac{d\varnothing}{dt} + \frac{1}{2} CQ^2. \tag{4}$$

Энергия жидкости, вытекающей в единицу времени, есть

$$\frac{dW'}{dt} = \rho g Q (h + z) + \frac{1}{2} \rho r^2 Q \left[\frac{d\varnothing}{dt}\right]^2 +$$
$$+ \rho \frac{r}{k} \cos\alpha Q^2 \frac{d\varnothing}{dt} + \frac{1}{2} \frac{\rho}{k^2} Q^3. \tag{5}$$

Работа двигателя, расходуемая на вращение вала в единицу времени, равна[28]

$$L \frac{d\varnothing}{dt} = \frac{d\varnothing}{dt} \left(\frac{dH}{dt} + \frac{dH'}{dt}\right). \tag{6}$$

Работа, передаваемая жидкости и отнесенная к единице времени, равна

$$\frac{dW}{dt} + \frac{dW'}{dt}.$$

Приравнивая эти выражения, получим уравнения движения:[29]

$$A \frac{d^2\varnothing}{d.^2} + B \frac{dQ}{dt} + \rho r^2 Q \frac{d\varnothing}{dt} + \rho \frac{r}{k} \cos\alpha\, Q^2 = L; \tag{7}$$

$$B \frac{d^2\varnothing}{dt^2} + C \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{2} \frac{\rho}{k^2} Q^2 + \rho g (h + z) - \frac{1}{2} \rho r^2 \left[\frac{d\varnothing}{dt}\right]^2 = 0. \tag{8}$$

Эти уравнения относятся к трубке с всюду заданным сечением. Если жидкость находится в открытых каналах, то значения A и C будут зависеть от глубины, до которой ка-

налы наполнены в каждой точке; значение k также будет зависеть от глубины заполнения в месте вытекания.

В регуляторе, описанном К. В. Сименсом в цитированной уже работе, истечение практически ограничено глубиной жидкости у края сосуда.

Результирующее ускорение у края сосуда $f=\sqrt{g^2+\omega^4r^2}$.

Если край идеально горизонтален, то истечение будет пропорционально $x^{\frac{3}{2}}$ (где x — глубина у края), и средний квадрат относительной скорости у края будет пропорционален x или $Q^{\frac{2}{3}}$.

Если ширина вытекающего потока у поверхности пропорциональна x^n, где x — высота над самой низкой точкой истечения, то Q будет изменяться так же, как $x^{n+\frac{3}{2}}$, и средний квадрат скорости истечения относительно сосуда будет изменяться тоже как x или как $\frac{1}{Q^{n+\frac{3}{2}}}$.

Если $n=-\frac{1}{2}$, то и истечение и средний квадрат скорости будут оба пропорциональны x.

Из второго уравнения для среднего квадрата скорости находим:

$$\frac{Q^2}{k^2}=-\frac{2}{\rho}\left(B\frac{d^2\varnothing}{dt^2}+C\frac{dQ}{dt}\right)+r^2\left[\frac{d\varnothing}{dt}\right]^2-2g(h+z). \quad (9)$$

Если скорость вращения и скорость истечения постоянны, то это уравнение принимает вид:

$$\frac{Q^2}{k^2}=r^2\left[\frac{d\varnothing}{dt}\right]^2-2g(h+z). \quad (10)$$

Из первого уравнения,[30] предполагая, как в конструкции Сименса, что $\cos\alpha=0$ и $B=0$, найдем: [31]

$$L=\rho r^2 Q\frac{d\varnothing}{dt}. \quad (11)$$

В регуляторе Сименса имеется приспособление, [32] посредством которого устанавливается определенное соотношение между L и z:

$$L = -Sz, \tag{12}$$

откуда

$$\frac{Q^2}{k^2} = r^2 \left[\frac{d\varnothing}{d.}\right]^2 - 2gh + \frac{2g\rho}{S} r^2 Q \frac{d\varnothing}{dt}. \tag{13}$$

Если условия истечения могут быть созданы такими, что средний квадрат скорости, представляемый величиной $\frac{Q^2}{k^2}$, пропорционален Q, [33] и если жесткость пружины, которая определяет S, такова, что

$$\frac{Q^2}{k^2} = \frac{2g\rho}{S} r^2 \omega Q, \tag{14}$$

то при $2gh = \omega^2 r^2$ это уравнение станет таким:

$$0 = r^2 \left(\left[\frac{d\varnothing}{dt}\right]^2 - \omega^2\right) + \frac{2\rho}{S} r^2 Q \left(\frac{d\varnothing}{dt} - \omega\right). \tag{15}$$

Из этого уравнения видно, что в данном случае скорость вращения и скорость истечения не могут быть постоянными, если скорость вращения не равна ω.

На практике, вероятно, будет трудно выполнить точно условие, касающееся истечения; но очень хорошие результаты были получены в широких пределах изменения движущего момента при помощи соответствующей подгонки пружины. При ровном ободке *максимум* скорости будет наступать при определенном движущем моменте. Это, повидимому, подтверждают результаты, приведенные на стр. 667 работы Сименса.

Если расход жидкости ограничен отверстием (снизу чаши), то при определенном значении движущего момента будет иметь место не максимум, а *минимум* скорости.

Дифференциальное уравнение, определяющее характер малых возмущений, вообще говоря, будет четвертого порядка,

но может быть сведено к третьему посредством надлежащего выбора значения среднего истечения. [34]

ТЕОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ

В некоторых механизмах главный вал соединяется с регулятором посредством шестерни (или системы шестерен), которая может вращаться вокруг оси, а эта ось, в свою очередь, сама может вращаться вокруг оси главного вала. Обе эти оси могут составлять прямой угол между собой, как в обыкновённом дифференциале, или же они могут быть параллельны, как в некоторых часовых механизмах. [35]

Пусть ξ и η представляют углы поворота относительно каждой из этих осей, θ — угол поворота главного вала и $\varnothing$ — угол поворота вала регулятора; тогда $\varnothing$ и θ будут линейными фукнциями от ξ и η и движение какой-нибудь точки системы может быть выражено через каждую из пар ξ и η или θ и $\varnothing$. [36] Пусть скорость частицы, масса которой есть m, при разложении в направлении x есть

$$\frac{dx}{dt} = p_1 \frac{d\xi}{dt} + q_1 \frac{d\eta}{dt}. \qquad (1)$$

Аналогичные выражения будут и для других направлений координатных осей, причем для этих направлений величины p и q будут иметь индексы 2 и 3. Тогда уравнение движения Лагранжа станет таким:

$$\Xi\delta\xi + \mathrm{H}\delta\eta - \Sigma m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right) = 0, \qquad (2)$$

где Ξ и H — силы, стремящиеся увеличивать соответственно ξ и η, и где предполагается, что сил, приложенных в каких-нибудь других точках, нет.

Далее, если положим, что

$$\delta x = p_1\delta\xi + q_1\delta\eta \qquad (3)$$

и
$$\frac{d^2x}{dt^2} = p_1 \frac{d^2\xi}{dt^2} + q_1 \frac{d^2\eta}{dt^2}, \tag{4}$$

то уравнение примет вид:

$$\left(\Xi - \Sigma mp^2 \frac{d\xi}{dt^2} - \Sigma mpq \frac{d^2\eta}{dt^2}\right)\delta\xi + \left(\mathrm{H} - \Sigma mpq \frac{d^2\xi}{dt^2} - \right.$$
$$\left. - \Sigma mq^2 \frac{d^2\eta}{dt^2}\right)\delta\eta = 0, \tag{5}$$

и так как $\delta\xi$ и $\delta\eta$ независимы, то коэффициент при каждой из них должен быть равен нулю.

Если положим теперь, что

$$\Sigma(mp^2) = L, \quad \Sigma(mpq) = M, \quad \Sigma(mq^2) = N, \tag{6}$$

где

$$p^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2, \quad pq = p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3 \text{ и}$$
$$q^2 = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2,$$

то уравнениями движения будут

$$\Xi = L \frac{d^2\xi}{dt^2} + M \frac{d^2\eta}{dt^2}, \tag{7}$$

$$\mathrm{H} = M \frac{d^2\xi}{dt^2} + N \frac{d^2\eta}{dt^2}. \tag{8}$$

Если аппарат устроен так, что $M = 0$, то оба движения будут независимыми друг от друга. При этом движения ξ и η могут рассматриваться как повороты вокруг сопряженных осей, т. е. таких осей, у которых вращение вокруг одной из них не стремится создать момент относительно другой.

Пусть теперь Θ момент, действующий со стороны вала на дифференциальную систему, и Φ — момент, действующий со стороны дифференциальной системы на регулятор. Тогда уравнением движения будет

$$\Theta\delta\theta + \Phi\delta\varnothing + \left(\Xi - L\frac{d^2\xi}{dt^2} - M\frac{d^2\eta}{dt^2}\right)\delta\xi +$$
$$+ \left(\mathrm{H} - M\frac{d^2\xi}{dt^2} - N\frac{d^2\eta}{dt^2}\right)\delta\eta = 0. \tag{9}$$

Если
$$\delta\xi = P\delta\theta + Q\delta\varnothing, \quad \delta\eta = R\,\delta\theta + S\delta\varnothing \tag{10}$$
и если положить
$$\left.\begin{aligned} L' &= LP^2 + 2MPR + NR^2, \\ M' &= LPQ + M(PS + QR) + NRS, \\ N' &= LQ^2 + 2MQS + NS^2, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

то уравнениями движения для θ и $\varnothing$ будут [40]
$$\left.\begin{aligned} \Theta + P\Xi + Q\mathrm{H} &= L'\frac{d^2\theta}{dt^2} + M'\frac{d^2\varnothing}{dt^2}, \\ \Phi + R\Xi + S\mathrm{H} &= M'\frac{d^2\theta}{dt^2} + N'\frac{d^2\varnothing}{dt^2}. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Если $M' = 0$, то движения для θ и $\varnothing$ будут независимы друг от друга. Если M тоже равно нулю то мы получаем отсюда соотношение
$$LPQ + NRS = 0, \tag{13}$$

и если это условие выполняется, то возмущения движения по θ не будут действовать на движение по $\varnothing$. Зубья дифференциальной системы, находящиеся в зацеплении с главным валом и с регулятором, тогда будут соответствовать центру удара и центру вращения простого тела, и это соотношение будет взаимным. [37]

В таких дифференциальных системах постоянная сила H, достаточная для приведения регулятора в надлежащее рабочее состояние, приложена к оси η и движение этой оси используется для перестановки заслонки или тормоза на главном валу машины. Величина Ξ в этом случае будет просто трением по оси ξ. Если моменты инерции различных частей системы выбраны так, что $M' = 0$, то возмущение, вызванное ударом или толчком на машину, подействует мгновенно на заслонку, но не сообщит накакого импульса регулятору. [38]


И.А.ВЫШНЕГРАДСКИЙ

И. А. ВЫШНЕГРАДСКИЙ



ОБ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ РЕГУЛЯТОРОВ



И. А. ВЫШНЕГРАДСКИЙ

ОБ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ РЕГУЛЯТОРОВ

Wischnegradski
Sur la théorie générale des régulateurs

Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences. Paris 1876, t. 83, стр. 318—321.



ОБ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ РЕГУЛЯТОРОВ



Предметом этого мемуара является исследование закона движения регулятора прямого действия, присоединенного к двигателю, когда нарушается равновесие между движущей силой и сопротивлением. Автор рассматривает случай, когда изменения скорости и перемещения регулятора малы.

Разлагая в ряды по возрастающим степеням малых величин различные функции, выражающие условия задачи, автор довольствуется членами, пропорциональными первым степеням этих величин.

Трактуя, в остальном, задачу с общей точки зрения, автор рассматривает регулятор, снабженный катарактом (поршень, погруженный в жидкость, которую он перемещает своим движением). Сопротивление этого катаракта предполагается пропорциональным скорости поршня, остающейся всегда достаточно малой.

Наконец, в исследовании отбрасываются пассивные сопротивления как в регуляторе, так и в управляемых им приспособлениях, что допустимо для хорошо сконструированных регуляторов, например для регуляторов различных машин Корлисса (Corliss).

Обозначим через:

t — время, отсчитываемое с момента нарушения равновесия между движущей силой и сопротивлением;

u — значение, которое принимает в конце времени t перемещение какой-нибудь точки регулятора, управляющего органом, предназначенным для изменения интенсивности движущей силы; это перемещение предполагается прямолинейным; скорость рассматриваемой точки есть $\frac{du}{dt}$ и ее ускорение $\frac{d^2u}{dt^2}$;

ω_0 — угловая скорость вала двигателя в нормальных условиях его хода;

ω — скорость вала к концу времени t;

ω_u — скорость вала, соответствующая равновесию регулятора на расстоянии u от его нормального положения;

p — нормальная интенсивность движущей силы и сопротивления, отнесенных к тому же самому плечу рычага ρ;

q — значение, которое принимает сопротивление в силу испытываемого им изменения;

P — интенсивность движущей силы, соответствующая положению регулятора к концу времени t;

I — момент инерции машины, приведенный к ее валу.

Часть ускорения $\frac{d^2u}{dt^2}$, зависящую от изменения скорости машины, автор выражает как $K\frac{\omega-\omega_u}{\omega_0}$, и часть, зависящую от влияния катаракта, — $M\frac{du}{dt}$. Кроме того, он полагает

$$K\frac{\omega_u-\omega_0}{\omega_0}=Nu,\quad (p-P)\rho=Lu.$$

K, L, M и N — постоянные и положительные коэффициенты, значения которых зависят от конструкции регулятора и от его связей с машиной. Таким образом получается уравнение

$$\frac{du^3}{dt^3}+M\frac{d^2u}{dt^2}+N\frac{du}{dt}+\frac{KL}{I\omega_0}u=K\frac{(p-q)\rho}{I\omega_0}.$$

Это — уравнение третьего порядка, линейное, с постоянными коэффициентами; его интеграл зависит от корней уравнения

$$\theta^3 + M\theta^2 + N\theta + \frac{KL}{I\omega_0} = 0.$$

Чтобы проще разобрать представляющиеся различные случаи, автор вводит две новые переменные x и y. Полагая

$$M = x\sqrt[3]{\frac{KL}{I\omega_0}}, \quad N = y\sqrt[3]{\left(\frac{KL}{I\omega_0}\right)^2},$$

он доказывает, что:

1) все регуляторы, для которых $xy < 1$, как только нарушено их равновесие, колеблются с амплитудами, возрастающими до бесконечности со временем, что делает их не пригодными для регулирования движения двигателя;

2) все регуляторы, для которых

$$xy > 1, \ x^2y^2 - 4(x^3 + y^3) = 18xy - 27 < 0,$$

совершают колебания, амплитуды которых уменьшаются с течением времени. При этом положение регуляторов неограничено стремится к положению, соответствующему равновесию;

3) все регуляторы, для которых

$$x^2y^2 - 4(x^3 + y^3) + 18xy - 27 > 0,$$

не совершают совсем колебаний, но движутся постоянно в одном и том же направлении, безгранично приближаясь к положению равновесия, отвечающему равенству между движущей силой и новым значением сопротивления.

Чтобы яснее представить эти основные результаты, автор строит кривую, определяемую уравнением:

$$x^2y^2 - 4(x^3 + y^3) + 18xy - 27 = 0,$$

которую в дальнейшем будем обозначать через A, и равнобочную гиперболу, уравнение которой есть $xy = 1$. Простран-

ство, заключенное между положительными направлениями осей OX и OY, разбивается этими двумя кривыми на три области, *первая* из которых, именно та, которая заключена между гиперболой и осями, содержит точки, которым соответствуют регуляторы с осциллаторным движением и с амплитудами, возрастающими вместе со временем; *вторая* область — между гиперболой и кривой A — соответствует регуляторам с осциллаторным движением и с убывающей амплитудой; *третья* — область, ограниченная кривой A, соответствует регуляторам, которые, выходя из их состояния равновесия, постоянно движутся в одном и том же направлении.

Если для заданного регулятора вычислены значения x и y, то непосредственно по чертежу увидим закон движения этого регулятора.

Автор получает такие следствия:

1. Регулятор, не снабженный катарактом, какова бы ни была при этом его конструкция, не может хорошо работать, потому что для такого регулятора $M = O$ и, следовательно, $x = 0$; условие $xy > 1$ уже не может быть удовлетворено.

2. Изохронный регулятор не может хорошо работать, даже если он снабжен катарактом, сколь бы эффективным он ни был, потому что для такого регулятора $N = 0$, следовательно, $y = 0$ и условие $xy > 1$ не может быть удовлетворено.

Специальным рассмотрением автор показывает, что последнее следствие справедливо для всех катарактов, какой бы степенью скорости ни выражалось их сопротивление.

Устанавливая таким образом непригодность изохронных регуляторов, автор показывает, что изыскание *приблизительно* изохронных регуляторов сохраняет всю свою важность, если только иметь в виду, что предел, к которому стремится скорость машины, снабженной хорошо действующим регулятором, дается выражением

$$\omega_0 \left[1 + \frac{N(p-q)\rho}{KL}\right].$$

Следовательно, окончательная скорость машины изменяется вместе с сопротивлением тем меньше, чем меньше значение N отличается от нуля; таким образом выгодно сделать N возможно меньшим, одновременно увеличивая действие катаракта, для того чтобы удовлетворить условию $xy > 1$.

Наконец, автор объясняет, что вследствие влияния пассивных сопротивлений некоторые регуляторы, не удовлетворяющие условию $xy > 1$, могут еще эффективно действовать; но тогда это преимущество покупается за счет их чувствительности, которая не может быть сохранена без максимально возможного уменьшения пассивных сопротивлений. [1]

И. А. ВЫШНЕГРАДСКИЙ



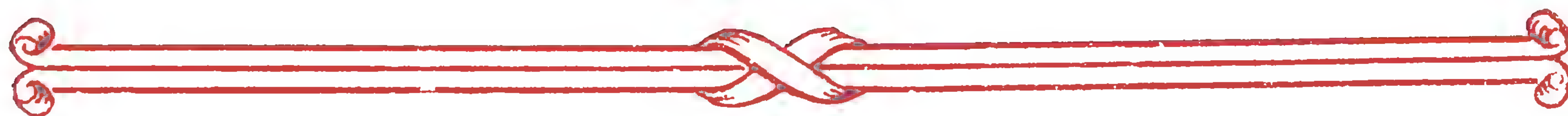
О РЕГУЛЯТОРАХ ПРЯМОГО ДЕЙСТВИЯ



И. А. ВЫШНЕГРАДСКИЙ

О РЕГУЛЯТОРАХ ПРЯМОГО ДЕЙСТВИЯ

Известия
С. П. Б. Практического Технологического Института
Том I, 1877 год, стр. 21—62



О РЕГУЛЯТОРАХ ПРЯМОГО ДЕЙСТВИЯ



1. Предмет настоящего исследования состоит в изучении движения, принимаемого регулятором машины-двигателя, когда существующее в ней равновесие между движущей силой и сопротивлением вследствие какой бы то ни было причины нарушается. Вопрос этот во всей его общности представляет затруднения почти непреодолимые, и точное его решение крайне трудно, а потому настоящее исследование имеет целью найти только общий характер изучаемого явления, который до известной степени видоизменяясь, смотря по особым условиям машины и ее действия, будет сохраняться в большей или меньшей степени, в зависимости от того, в какой мере будут исполнены предположения, положенные в основание всей теории. Предположения эти состоят в следующем:

а) Касательно устройства и способа действия машины допущено, что она имеет вращательное движение под влия-

---

* Общий метод и главные результаты настоящего исследования были напечатаны в № 5 т. LXXXIII (31 июля 1876 г.) Comptes Rendus Парижской Академии в извлечении, представленном академиком Треска под заглавием: Wischnegradski, Mémoire sur la théorie générale des régulateurs (см. стр. 35 этого тома).

нием движущего усилия и сопротивления, непрерывно действующих на постоянных плечах относительно оси вращения, причем предположено, что напряжение движущего усилия изменяется только вследствие действия регулятора. Такое предположение конечно не совершенно правильно, например, для паровых машин, в которых напряжение движущего усилия, отнесенного к постоянному плечу, изменяется в течение оборота совершенно независимо от влияния регулятора. Но нетрудно видеть, что при сильном маховике, допускающем лишь незначительные изменения скорости машины, и при действии регулятора только вне пределов этих изменений, общий характер изучаемого явления будет для паровых машин тот же самый, как, например, для турбин, в которых сделанное предположение может считаться совершенно точным, и для водяных колес, для которых эта гипотеза весьма близка к действительности.

б) Относительно устройства регулятора сделано предположение, что он будет *прямого действия*, т. е. что он снабжен органом, который при изменении скорости машины приходит в движение, и, будучи соединен с прибором, назначенным для изменения напряжения движущего усилия, производит это изменение; относительно этого органа допущено, что он имеет прямолинейное движение; и то и другое условие, как известно, выполняются в большей части действительно употребительных регуляторов *. Впрочем, способ исследования,

* Так как действует большая часть центробежных регуляторов, муфта которых имеет прямолинейное движение, передаваемое известным приводом или тормозящему клапану, или прибору для изменения расширения пара в паровых машинах. Так как эта муфта и составляет орган, служащий для передачи движения регулятора прибору, производящему изменение напряжения движущего усилия, то для краткости орган этот будет впоследствии именоваться просто *муфтой*, прибор же, соединенный с муфтой и изменяющий напряжение движущего усилия, будет называться *регулирующим прибором*.

примененный в настоящей статье, может быть с необходимыми изменениями приложен и к регуляторам непрямого действия, хотя результаты, получаемые в применении к ним, вообще сложнее и их исследование требует некоторых особых приемов;[2] что же касается до регуляторов, в которых орган, действующий на прибор, изменяющий напряжение движущего усилия, мог бы иметь непрямолинейное движение, то результаты сей статьи остаются к ним вполне применимыми.

в) Наконец, предположено для большей полноты и общности исследования, что регулятор снабжен *катарактом*, т. е. прибором, который приходит в движение вместе с муфтой регулятора и производит при этом на муфту давление, зависящее от ее скорости и противоположное направлению ее движения. Как известно, в виде такого катаракта обыкновенно употребляется поршень, который может двигаться в закрытом с обоих концов цилиндре, наполненном жидкостью, которая при движении поршня вытесняется с одной его стороны на другую, проходя при этом через отверстие, которое можно регулировать по произволу.

2. Задача о движении регулятора даже с теми упрощениями, которые объяснены в предыдущем параграфе, представляет весьма значительные трудности, если ее рассматривать в самом общем виде; но в этом общем виде решение ее и не нужно для практических приложений. Имея в виду эту главную цель, можно прямо заметить, что регулятор только тогда хорошо действует, когда угловая скорость рассматриваемой машины изменяется мало, а следовательно, и самые размахи регулятора сохраняют незначительную величину, происходя при том совершенно плавным образом. Поэтому в исследовании движения регулятора, покойно действующего, можно допустить,[3] что:

а) разность между действительной и нормальной угловыми скоростями машины будет мала сравнительно с величиной нормальной скорости,

б) перемещения муфты регулятора будут малы,

в) скорости этих перемещений будут также незначительными величинами.

Пользуясь этими ограничениями, ни в чем, впрочем, не уменьшающими практического значения результатов, можно при исследовании действия регуляторов развертывать в строки различные функции указанных малых величин и довольствоваться только членами, пропорциональными первым их степеням, отбрасывая члены второго и высших порядков. Этот прием, составляющий основание исследования всех вообще малых колебаний, представляет в рассматриваемом случае столь существенное упрощение задачи, что она вполне разрешается известными аналитическими способами, и результаты решения прямо указывают на условия, которые должны быть исполнены для того, чтобы исчисленные выше предположения были исполнены.

3. Представим себе какую-либо машину-двигатель, исполняющую условия, изложенные в § 1, и вообразим, что в данный момент, с которого начинаем рассматривать движение, машина имеет свою нормальную угловую скорость, которую назовем через ω_0; что движущее усилие имеет свою нормальную величину, которую назовем через p; что это усилие действует на вал машины на некотором определенном плече ρ, и что сопротивление, преодолеваемое машиной, действует на том же плече и имеет ту же величину p. Если бы эти условия продолжали существовать, то машина продолжала бы двигаться с своей нормальной скоростью, но вообразим, что в рассматриваемое мгновение, от которого мы и начинаем изучать движение машины, сопротивление изменилось и напряжение его из прежней величины p внезапно обратилось в Q, и затем сохраняет эту величину. Очевидно, непосредственным последствием этого будет нарушение равновесия, до того времени имевшего место между движущей силой и сопротивлением, и изменение скорости машины, которое,

с своей стороны, подействует на регулятор и приведет его в движение: это движение регулятора изменит напряжение движущей силы, и машина вообще получит некоторое движение, которое существенно отличается от прежнего и которое составит предмет настоящего исследования.

4. Вообразим, что после того мгновения, с которого мы начали рассматривать движение машины, протекло некоторое время t; пусть угловая скорость главного вала машины будет в конце этого времени ω, и пусть муфта регулятора находится в расстоянии u от своего нормального положения; эта величина u на основании предположения, сделанного во втором параграфе, всегда будет величиной весьма малою; назовем, кроме того, через ω_u ту угловую скорость машины, которую она должна бы была иметь для того, чтобы силы, действующие на муфту регулятора в его теперешнем положении, были в равновесии.

В действительности они в равновесии не будут, так как ω вообще не равно ω_u, и, следовательно, муфта регулятора будет в рассматриваемое мгновение иметь некоторое ускорение, произведение которого на массу всех частей регулятора, принимающих участие в его колебаниях, приведенную к муфте, будет равно сумме проекций на направление движения муфты сил, к регулятору приложенных.

Так как массы, входящие в состав регулятора, имеют вообще движение, отличное от движения муфты, и численные соотношения между перемещениями муфты и других масс регулятора будут для различных его положений различны, то приведенная к муфте регулятора масса частей, его составляющих, будет иметь вообще величину переменную, которая будет зависеть от u; но как u будет величина весьма малая, то эта масса, на основании сказанного во втором параграфе, вообще может быть представлена в виде:

$$A + Bu,$$

где A и B суть величины постоянные, и притом по понятной причине A есть величина положительная. Вследствие этого произведение из приведенной к муфте массы всех частей регулятора и ускорения муфты вообще представится в виде:

$$(A+Bu)\frac{d^2u}{dt^2}.$$

Это произведение, как сказано выше, равно сумме проекций на направление движения муфты всех усилий, которые рассматриваемое ускорение производят. Усилия же эти могут быть прямо разделены на два разряда: одни, а именно, сопротивление катаракта и вредные сопротивления как самого регулятора, так и регулирующего прибора, производят всегда и во всяком случае замедляющее действие на движение муфты, другие же силы могут производить и ускоряющее действие и замедляющее; окончательное их определение может быть сделано только в частных случаях, так как величина этих сил, очевидно, будет зависеть от устройства регулятора. В общем же случае действие их можно обсудить следующим образом. Вообразим муфту регулятора в покое в то время, как она находится в расстоянии u от своего нормального положения. Если при этом скорость машины ω равна той скорости ω_u, при которой муфта регулятора остается в равновесии, то муфта не выходит из покоя, а потому рассматриваемые силы никакого действия на муфту регулятора не производят, и сумма их проекций на направление движения муфты будет равна нулю; если скорость машины ω будет больше ω_u, то муфта выходит из покоя и притом движение, ею получаемое, будет иметь такое направление, чтобы соединенный с муфтой регулирующий прибор начал *уменьшать* напряжение движущей силы; если же скорость машины ω будет меньше ω_u, то муфта тоже выходит из покоя, но направление получаемого ею движения будет таково, чтобы регулирующий прибор начал *увеличивать* напряжение движущей силы. Поэтому уско-

рение, производимое в муфте всеми силами, действующими на регулятор, за исключением сопротивлений катаракта, регулятора и регулирующего прибора (а следовательно, и сумма проекций этих сил на направление движения муфты), обращается в нуль, когда разность $\omega - \omega_u$ равна нулю, и изменяет свой знак вместе с этой разностью.

Принимая это в соображение, замечая, что отношение $\frac{\omega - \omega_u}{\omega_0}$ для хорошего действия регулятора должно быть величиною весьма малою, и отбрасывая степени малых величин выше первой, мы можем сказать, что рассматриваемая нами сумма проекций вообще и всегда может быть выражена через произведение малой дроби $\frac{\omega - \omega_u}{\omega_0}$ на некоторый, независимый от u коэффициент, величина которого будет в каждом частном случае определяться устройством регулятора; притом, если будем считать *положительным* то направление движения муфты, при котором регулирующий прибор *уменьшает* напряжение движущей силы, то величина рассматриваемого коэффициента будет также положительная, и как по выше объясненному A есть величина положительная, то, называя коэффициент, о котором идет речь, через AKg*, мы получим, что величина K будет положительная и искомая сумма проекций на направление движения муфты всех усилий, действующих на регулятор, за исключением сопротивления катаракта, а равно вредных сопротивлений регулятора и регулирующего прибора, изобразится через:

$$AKg\frac{\omega - \omega_u}{\omega_0}.$$

Это выражение, очевидно, можно представить в следующем виде:

* Где g есть ускорение силы тяжести.

$$AKg\frac{\omega-\omega_0}{\omega_0}-AKg\frac{\omega_u-\omega_0}{\omega_0},$$

а как ω_u есть функция от u, равная ω_0, когда u равно нулю, то, пренебрегая степенями u выше первой, можем написать:

$$Kg\frac{\omega_u-\omega_0}{\omega_0}=Nu, \qquad (1)$$

где N — величина постоянная. Притом, согласно сделанному уже условию относительно того направления u, которое принимается за положительное, получим, что N будет величина положительная. Таким образом рассматриваемая сумма проекций всех сил, действующих на регулятор, за исключением сопротивлений катаракта, регулирующего прибора и самого регулятора, изобразится через

$$AKg\frac{\omega-\omega_0}{\omega_0}-ANu,$$

где K и N суть числа положительные.

Что касается вредных сопротивлений регулятора и регулирующего прибора, то величины их, приведенные к муфте регулятора, будут, конечно, изменяться вместе с положением муфты, но как эти величины в каждом хорошем регуляторе будут малы, да притом положение муфты также мало переменяется, то их можно считать постоянными; мы их обозначим соответственно через $\lambda AR'$ и $\lambda AR''$, где λ будет ± 1 и его знак будет всегда противоположен знаку $\frac{d\iota}{dt}$.[5] Есть много регуляторов, где эти величины столь малы, что ими можно пренебрегать даже и сравнительно с теми величинами, которые мы сохраняем в качестве членов первого порядка. Впоследствии это допущение и будет сделано, но в настоящем параграфе мы пока сохраним их с главнейшею целью определить их значение в теории регуляторов.[6]

Сопротивление катаракта будет зависеть от скорости движения муфты, и как при малых перемещениях муфты скорость ее не может быть велика, а в этом случае сопротивление можно считать пропорциональным первой степени скорости, то рассматриваемое сопротивление катаракта может быть выражено через:

$$-AM\frac{du}{dt},$$

где M — величина положительная и постоянная.

Таким образом сумма проекций на направление движения муфты всех усилий, действующих на регулятор, представится в виде:

$$A\left\{Kg\frac{\omega-\omega_0}{\omega_0}-Nu-\lambda(R'+R'')-M\frac{du}{dt}\right\}.$$

Так как все члены этого выражения суть малые величины, которые можем считать первого порядка, то, приравнивая эту сумму выражению $(A+Bu)\frac{d^2u}{dt^2}$ и сохраняя в выражении $\frac{d^2u}{d.^2}$ только члены первого порядка, получим для определения u уравнение

$$\frac{d^2u}{dt^2}=Kg\frac{\omega-\omega_0}{\omega_0}-Nu-\lambda(R'+R'')-M\frac{du}{dt}$$

или

$$\frac{d^2u}{dt^2}+M\frac{du}{dt}+Nu=Kg\frac{\omega-\omega_0}{\omega_0}-\lambda(R'+R''). \qquad (2)$$

При употреблении этого равенства должно постоянно помнить, что вредные сопротивления привести в движение ничего не могут, а потому если предположим, что $u=0$ и $\frac{du}{dt}=0$, т. е. если допустим, что муфта регулятора находится в покое в своем нормальном положении, то она начнет двигаться,

только когда угловая скорость машины выйдет из пределов, получаемых в предположении, что

$$Kg\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} - \lambda(R' + R'') = 0.$$

Называя эти пределы через ω' и ω'', мы получим для них выражения

$$\omega' = \omega_0\left(1 + \frac{R' + R''}{Kg}\right), \quad \omega'' = \omega_0\left(1 - \frac{R' + R''}{Kg}\right).$$

Из этих величин пределов видно, что регулятор вообще будет допускать тем меньшие относительные отклонения от средней скорости, вовсе не начиная действовать, чем больше будет дробь

$$\frac{Kg}{R' + R''},$$

а потому эту величину весьма прилично назвать мерой *чувствительности* регулятора.[7]

5. Кроме уравнения (2), при исследовании действия регулятора необходимо иметь в виду зависимость, существующую между угловой скоростью машины ω, имеющей место в данное мгновение, и напряжением движущей машину силы, которое, под влиянием перемещений муфты регулятора, постоянно изменяется.

Если это переменное напряжение назовем через F, если, кроме того, обозначим через I момент инерции всей машины, приведенный к оси ее главного вала, и припомним, что мы обозначили через ρ общее плечо, на котором действует как движущая сила, так и сопротивление Q, то, как известно, уравнение, определяющее угловую скорость машины, будет:

$$I\frac{d\omega}{dt} = \{F - Q\}\rho,$$

что, очевидно, можно написать таким образом:

$$I\frac{d\omega}{dt}=\{p-Q\}\rho-\{p-F\}\rho,$$

где p есть нормальное напряжение движущей силы и сопротивления.

Первый член второй части этого уравнения представляет собой постоянную разность между нормальным моментом сопротивления $p\rho$ и изменившимся его моментом $Q\rho$, т. е. изображает собой изменение, происшедшее в моменте сопротивления и вызывающее собой то переменное движение, которое мы изучаем.

Второй же член второй части написанного уравнения есть не что иное, как изменение, происшедшее в напряжении движущего момента вследствие перемещения муфты регулятора. Это изменение, очевидно, равно нулю, когда перемещение u муфты регулятора есть нуль, и с изменением знака u разность $(p-F)\rho$ также изменяет свой знак, притом согласно принятому условию таким образом, что когда u положительно, то движущая сила уменьшается, т. е. $F<p$, и когда u отрицательно, то движущая сила увеличивается, т. е. $F>p$.

Поэтому, и принимая во внимание, что u есть величина малая, степенями которой выше первой мы условились пренебрегать, можем написать:

$$\{p-F\}\rho=Lu, \tag{3}$$

где L будет постоянный положительный коэффициент, величина которого в каждом частном случае будет зависеть от передачи, существующей между муфтой и регулирующим прибором, а также и от способа действия самого регулирующего прибора.

Вставляя величину $(p-F)\rho$, определенную равенством (3), в предыдущее уравнение, мы получим его в таком виде:

$$I\frac{d\omega}{dt}=\{p-Q\}\rho-Lu. \tag{4}$$

Дифференцируя затем по t уравнение (2), мы находим [8]

$$\frac{d^3u}{dt^3}+M\frac{d^2u}{dt^2}+N\frac{du}{dt}=\frac{Kg}{\omega_0}\frac{d\omega}{dt},$$

а вставляя сюда вместо $\frac{d\omega}{dt}$ его значение из уравнения (4), приводим только что написанное уравнение к виду: [9]

$$\frac{d^3u}{dt^3}+M\frac{d^2u}{dt^2}+N\frac{du}{dt}+\frac{KgL}{I\omega_0}u=\frac{Kg}{I\omega_0}\{p-Q\}\rho, \tag{5}$$

разбор которого и доставит нам самые общие заключения относительно движения регулятора и его влияния на движение машины *.

6. Чтобы сделать этот разбор совершенно ясным, необходимо с точностью определить значение тех количеств, которые мы выше обозначили через K, L, M, N, и которые, как указано, существенным образом зависят как от устройства регулятора и регулирующего прибора, так и от существующей связи между ними.

а) *Количество* Kg представляет собой коэффициент, на который должно умножить отношение разности между дейст-

* Член Парижской Академии наук Г. Роллан в заметке, напечатанной в Comptes Rendus 14 августа 1876 г., по поводу извлечения из настоящей статьи, представленного, как выше сказано, 31 июля 1876 г., говорит, что им в неизданных еще исследованиях найдено также линейное уравнение третьего порядка для определения движения регулятора. Если Г. Роллан принимал в соображение действие катаракта, то его уравнение должно совпадать с уравнением (5). Должно, впрочем, заметить, что это уравнение правильно только для регуляторов прямого действия; для регуляторов непрямого действия дифференциальное уравнение, определяющее их движение, приводится к линейному уравнению четвертого порядка. [10]

вительной и равновесной скоростями к нормальной скорости, для того чтобы получить ту часть ускорения муфты регулятора, которая производится силами, на него действующими, за исключением сопротивления катаракта и сопротивлений регулятора и регулирующего прибора.

Поэтому чем больше будет величина K, тем меньшее изменение скорости сравнительно с равновесною ее величиной достаточно для сообщения муфте регулятора того же ускорения; из этого видно, что чем больше будет K, тем регулятор будет *подвижнее*, а потому представляется весьма естественным количество K наименовать мерой *подвижности* регулятора. [11]

б) *Количество* L есть коэффициент, на который нужно умножить перемещение u регулятора для того, чтобы получить производимое этим перемещением изменение движущего момента.

Очевидно, чем больше будет L, тем меньшее перемещение регулятора достаточно будет для того, чтобы произвести известное изменение движущего момента; поэтому очевидно, что чем больше будет величина L, тем *сильнее* будет влияние регулятора, а потому это количество можно принять за меру *силы* действия регулятора.

в) *Количество* KL имеет особое значение в том отношении, что, очевидно, чем *подвижнее* регулятор (чем больше K) и чем *сильнее* его действие (чем больше L), тем *быстрее* происходят все зависящие от регулятора изменения движущего момента, а потому произведение KL можно назвать мерой *быстроты* действия регулятора.

г) *Количество* M есть коэффициент, на который надобно умножить скорость муфты регулятора для того, чтобы получить ускорение ее, производимое действием катаракта; очевидно, что чем больше будет величина M, тем сильнее влияние катаракта, а потому эту величину весьма прилично наименовать *силой катаракта*. [12]

д) *Количество* N есть коэффициент, на который надо умножить перемещение u для того, чтобы получить отношение к нормальной скорости разности между соответствующей этому перемещению муфты равновесной скоростью и скоростью нормальной.

Очевидно, что чем больше будет N, тем больше будет разниться нормальная скорость от равновесной, соответствующей данному положению муфты; если N равно нулю, то нормальная скорость и равновесная скорость, отвечающая произвольному положению муфты, равны между собой, т. е. регулятор будет вполне *астатический*; чем больше N, тем значительнее будет разница между рассматриваемым регулятором и регулятором *астатическим*.

Поэтому представляется весьма естественным наименовать N мерой *устойчивости* регулятора.[13]

7. Уравнение (5), служащее для определения u в зависимости от времени, очевидно, есть линейное уравнение третьего порядка с постоянными коэффициентами и с последним постоянным членом. В интеграл его войдут три произвольные постоянные, которые мы назовем C, D, E и которые определятся из условия, что при $t=0$ будет

$$u=0; \quad \frac{du}{dt}=0; \quad \frac{d^2u}{dt^2}=0.$$

Форма же этого интеграла будет, как известно, находиться в зависимости от корней уравнения:

$$\theta^3+M\theta^2+N\theta+\frac{KLg}{I\omega_0}=0,$$

а именно: если все три корня этого уравнения будут вещественные и различные между собой, то, обозначая их через θ', θ'', θ''', получим:

$$u=\frac{(p-Q)\rho}{L}+Ce^{\theta' t}+De^{\theta'' t}+Ee^{\theta''' t}; \tag{6}$$

если все три корня будут вещественные, но два из них θ'' и θ''' будут равны между собой, то будет

$$u=\frac{(p-Q)\rho}{L}+Ce^{\theta' t}+(D+Et)e^{\theta'' t}; \tag{7}$$

если все три корня вещественные и все три равны между собой, то

$$u=\frac{(p-Q)\rho}{L}+(C+Dt+Et^2)e^{\theta' t}; \tag{8}$$

наконец, если два из числа корней уравнения

$$\theta^3+M\theta^2+N\theta+\frac{KLg}{I\omega_0}=0,$$

например, θ'' и θ''', будут мнимые[14] и, следовательно, представятся в виде

$$\theta''=\alpha+\beta i, \quad \theta'''=\alpha-\beta i,$$

то будет:

$$u=\frac{(p-Q)\rho}{L}+Ce^{\theta' t}+e^{\alpha t}(D\cos\beta t+E\sin\beta t). \tag{9}$$

Как видно, во всех тех случаях, когда корни уравнения

$$\theta^3+M\theta^2+N\theta+\frac{KLg}{I\omega_0}=0$$

суть вещественные, выражение для u не заключает в себе периодических функций и, следовательно, регулятор колебаний иметь не будет; притом легко усмотреть, что, так как все коэффициенты уравнения

$$\theta^3+M\theta^2+N\theta+\frac{KLg}{I\omega_0}=0$$

суть положительные, то вещественные корни этого уравнения будут все иметь непременно отрицательное значение, а потому показательные функции, входящие в выражения (6)—(8), с увеличением времени безгранично приближаются к нулю, а величина u к пределу

$$\frac{(p-Q)\varphi}{L},$$

при котором движущая сила F, как видно из уравнения (3), становится равной сопротивлению Q.

Итак, *во всех тех случаях, когда уравнение*

$$\theta^3 + M\theta^2 + N\theta + \frac{KLg}{I\omega_0} = 0$$

не имеет мнимых корней, регулятор, выведенный из своего нормального положения вследствие изменения сопротивления, преодолеваемого машиной, двигается не имея колебаний и при этом безгранично приближается к тому положению, при котором движущая сила приходит к равновесию с изменившимся сопротивлением.

Если же два из числа корней уравнения

$$\theta^3 + M\theta^2 + N\theta + \frac{KLg}{I\omega_0} = 0$$

будут мнимые, то u получает выражение (9), заключающее в себе периодические функции, и, следовательно, в этом случае муфта регулятора, выведенная из равновесного положения, получает движение, в состав которого входят периодические колебания.

При этом колебания эти могут или постепенно с течением времени увеличиваться, или постепенно уменьшаться, или оставаться без перемены.

Первый случай будет, очевидно, если в выражении (9) α больше нуля; второй будет иметь место, если α меньше нуля; наконец, третий случай будет тогда, когда $\alpha = 0$.

Во всех этих случаях θ', входящее в выражение (9), представляет собой вещественный корень уравнения

$$\theta^3 + M\theta^2 + N\theta + \frac{KIg}{I\omega_0} = 0$$

и, следовательно, имеет величину отрицательную, а потому среднее положение рассматриваемых колебаний с течением времени все более и более приближается к тому, при котором движущая сила уравновешивается с сопротивлением, но самые колебания или остаются без изменения, если $\alpha=0$, или безгранично увеличиваются, если $\alpha>0$, или безгранично уменьшаются, если $\alpha<0$; очевидно, что из всех этих случаев только последний позволяет ожидать от регулятора надлежащего действия.

Соединяя все предыдущее, мы вообще приходим к заключению, *что для правильного действия регулятора необходимо, чтобы все три корня уравнения*

$$\theta^3+M\theta^2+N\theta+\frac{KLg}{I\omega_0}=0$$

были вещественные, или чтобы при двух мнимых корнях этого уравнения общая им обоим вещественная часть была отрицательной.

8. Предыдущее показывает, что для теории регуляторов весьма важно иметь верный признак, по которому можно бы было отличать, будут ли корни уравнения

$$\theta^3+M\theta^2+N\theta+\frac{KLg}{I\omega_0}=0$$

все вещественные или два из них будут мнимые, и в этом последнем случае, будет ли общая им вещественная часть положительная или отрицательная.

Дабы найти этот признак в возможно простом и наглядном виде, преобразуем самое рассматриваемое уравнение, положив

$$\theta=\varphi\sqrt[3]{\frac{KLg}{I\omega_0}};\quad M=x\sqrt[3]{\frac{KLg}{I\omega_0}};\quad N=y\sqrt[3]{\left(\frac{KLg}{I\omega_0}\right)^2}.$$

Тогда уравнение, определяющее θ, приведется, очевидно, к следующему:

$$\varphi^3 + x\varphi^2 + y\varphi + 1 = 0, \qquad (10)$$

рассматривая которое, легко приходим к заключению, что уравнение

$$\theta^3 + M\theta^2 + N\theta + \frac{KLg}{I\omega_0} = 0$$

будет иметь все три корня вещественные, если [15]

$$y^2x^2 - 4(y^3 + x^3) + 18yx - 27 \geqslant 0,$$

и два корня этого уравнения будут мнимые, если

$$y^2x^2 - 4(y^3 + x^3) + 18yx - 27 < 0.$$

Если, приняв x и y за прямоугольные координаты, построим ту часть кривой, изображаемой уравнением

$$y^2x^2 - 4(y^3 + x^3) + 18yx - 27 = 0,$$

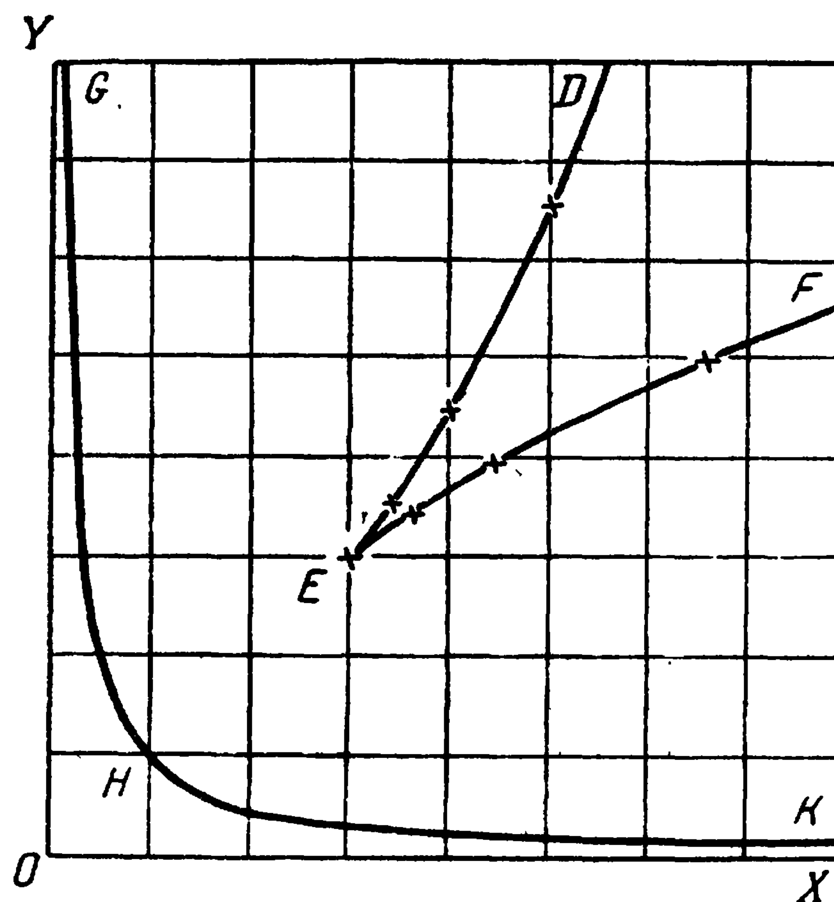
которая отвечает положительным значениям x и y, то эта кривая, очевидно, разделит весь прямой угол между положительными направлениями осей абсцисс и ординат на две части, притом так, что для x и y, отвечающих точкам, лежащим по ту же сторону кривой, как и оси координат, два из числа корней уравнения

$$\theta^3 + M\theta^2 + N\theta + \frac{KLg}{I\omega_0} = 0$$

будут мнимые, а для точек, лежащих по другую сторону кривой, нежели оси, все три корня этого уравнения будут вещественные. Для x и y, отвечающим точкам, лежащим на самой кривой, корни этого уравнения будут вещественные, и притом два из них будут равны между собой, а для одной из таких точек, именно для $x = 3$, $y = 3$, все три корня рассматриваемого уравнения будут равны между собой.

Строя эту кривую (фиг. 1), легко убедиться, что она имеет две ветви, проходящие через общую точку ($x = 3$, $y = 3$) и имеющие в этой точке общую касательную, наклоненную

к обеим осям координат под углом в 45°, что одна из этих ветвей обращает вогнутость к оси X и, простираясь в бесконечность, мало-помалу уменьшает свое наклонение к этой оси, а другая обращает свою вогнутость к оси Y и, простираясь в бесконечность, мало-помалу уменьшает свое наклонение к оси Y. Часть этой кривой DEF, построенная по точкам, изображена на фиг. 1.[16]



Фиг. 1.

С помощью ее, вычислив для каждого данного регулятора величины x и y, легко найти, будет ли этот регулятор, выведенный изменением сопротивления из нормального равновесного положения, иметь движение, не соединенное с колебаниями, или же движение его будет состоять из колебаний.

9. Если регулятор будет иметь движение, не заключающее в себе колебаний, то он, как уже знаем, будет постоянно приближать машину к новому равновесному положению. В случаях, если регулятор будет совершать колебания, они могут или с течением времени уменьшать свою амплитуду, и тогда регулятор будет также приближать машину к новому равновесному положению, или же колебания эти будут с течением времени увеличивать свою амплитуду, и тогда регулятор произведет совершенно неправильное движение машины. Как известно, эти два случая отличаются тем, что для первого вещественная часть, общая мнимым сопряженным корням уравнения

$$\theta^3 + M\theta^2 + N\theta + \frac{KLg}{I\omega_0} = 0,$$

будет отрицательная, а для второго положительная. Поэтому весьма важно найти признак, который позволил бы отличить эти два случая.

Принимая все предыдущие обозначения, и предполагая два корня уравнения

$$\theta^3 + M\theta^2 + N\theta + \frac{KLg}{I\omega_0} = 0$$

мнимыми, легко убедиться, что один вещественный корень этого уравнения изобразится через

$$\theta' = \left\{\sqrt[3]{z_1} + \sqrt[3]{z_2} - \frac{x}{3}\right\}\sqrt[3]{\frac{KLg}{I\omega_0}},$$

мнимые же корни будут

$$\theta'' = \left\{-\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{z_1} + \sqrt[3]{z_2}\right) - \frac{x}{3} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt[3]{z_1} - \sqrt[3]{z_2}\right)\right\}\sqrt[3]{\frac{KLg}{I\omega_0}},$$

$$\theta''' = \left\{-\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{z_1} + \sqrt[3]{z_2}\right) - \frac{x}{3} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt[3]{z_1} - \sqrt[3]{z_2}\right)\right\}\sqrt[3]{\frac{KLg}{I\omega_0}},$$

где z_1 и z_2 суть корни уравнения

$$z^2 + \left[\frac{2x^3}{27} - \frac{xy}{3} + 1\right]z + \left[\frac{x^2}{9} - \frac{y}{3}\right]^3 = 0,$$

имеющие, как известно, в этом случае вещественное значение.

Сличая эти корни между собою и называя общую вещественную часть, принадлежащую обоим мнимым корням, через α, находим, что

$$\theta' + 2\alpha = -x\sqrt[3]{\frac{KLg}{I\omega_0}} = -M,$$

откуда

$$\theta' = -\{M + 2\alpha\}.$$

Вставляя эту величину вместо θ' в уравнение

$$\theta^3 + M\theta^2 + N\theta + \frac{KLg}{I\omega_0} = 0,$$

найдем, что уравнение, которое определит собою величину α, будет:

$$8\alpha^3 + 8M\alpha^2 + 2M^2\alpha + 2N\alpha + NM - \frac{KLg}{I\omega_0} = 0.$$

Рассматривая это уравнение и замечая, что коэффициенты третьей, второй и первой степени α суть величины положительные, убеждаемся, что α будет величиной отрицательной, если

$$NM - \frac{KLg}{I\omega_0} > 0;$$

α будет равно нулю, если

$$NM - \frac{KLg}{I\omega_0} = 0,$$

и α будет величиной положительною, если

$$NM - \frac{KLg}{I\omega_0} < 0.$$

Заменяя в этих условиях N и M посредством их выражений через x и y, найдем, что регулятор будет иметь колебания постоянно и безгранично увеличивающиеся, если

$$xy < 1;$$

колебания регулятора будут постепенно уменьшаться, если

$$xy > 1$$

и, наконец, колебания эти будут сохранять постоянную амплитуду, если

$$xy = 1.$$

Отсюда видим, что если на нашем чертеже нанесем равнобочную гиперболу GHK, имеющую уравнение

$$xy = 1,$$

то она отделит точки плоскости, соответствующие таким регуляторам, которые, будучи раз выведены из равновесного положения, постоянно приближаются к новому равновесному положению посредством постепенно уменьшающихся колебаний, от точек, соответствующих таким регуляторам, которые, будучи раз выведены из равновесного положения, приходят в колебания, с течением времени постоянно возрастающие.

10. Построенные на основании предыдущих исследований две кривые DEF и CHK делят угол между положительными направлениями осей координат на три части.

Первая, заключающаяся между ветвями DE и EF кривой DEF, содержит точки, которым соответствуют такие регуляторы, что они, будучи раз выведены из равновесного положения, начинают двигаться без всяких колебаний, постепенно и безгранично приближаясь к новому равновесному положению.

Вторая, заключающаяся между кривой DEF и гиперболой GHK, содержит в себе точки, которым соответствуют такие регуляторы, что они, будучи один раз выведены из своего равновесного положения, получают колебания, которые, постепенно уменьшаясь с течением времени, приближают их безгранично к новому равновесному положению.

Третья, заключающаяся между гиперболой GHK и осями координат, содержит в себе точки, которым соответствуют такие регуляторы, что они, будучи один раз выведены из равновесного положения, затем постоянно с течением времени увеличивают свои размахи, сообщая машине совершенно неправильное движение.

Таким образом фиг. 1 дает совершенно простое средство отличить различные виды регуляторов. Из рассмотрения фиг. 1 между прочим прямо вытекают такие следствия:

Регуляторы астатические (для которых $N=0$, а следовательно, и $y=0$), ***каким бы катарактом они ни были снабжены, не годятся для регулирования машин.***[17]

Регуляторы, хотя и статические, но не снабженные катарактом (для которых $M=0$, а следовательно, и $x=0$), *не годятся для регулирования машин.* [18]

Ко всякому данному статическому регулятору (для которого дано отличающееся от нуля N, а следовательно, и y) *можно подыскать такой катаракт* (можно найти такое значение для x, а следовательно, и для M), *что этот регулятор не будет с течением времени безгранично увеличивать свои размахи* *.

11. Все предыдущие заключения выведены в предположении, что размахи регуляторов имеют малые величины, а потому, при приложении сказанных результатов, необходимо иметь постоянно в виду это условие: иначе они могут повести к совершенно фальшивым заключениям. Таким образом заключение, что всякий регулятор, для которого не исполнено условие

$$xy > 1,$$

* Один из найденных здесь результатов, хотя далеко не в той общей форме, был высказан Г. Карглем, профессором в Цюрихе, в его статье, помещенной в Civilingenieur в 1873 г. под заглавием „Beweis der Unbrauchbarkeit sämmtlicher astatischer Regulatoren".

В этой статье Г. Каргль, рассматривая только *астатические центробежные регуляторы, не снабженные катарактом,* старается показать, что они *не годятся для регулирования машин.* Как видно из предыдущего, это положение (впрочем, едва ли доказанное в упомянутой статье с надлежащей строгостью) гораздо общее. *Не только астатические центробежные регуляторы без катаракта, но и все статические регуляторы, если не снабжены катарактом, не могут надлежащим образом уравнивать движение машин.* Разница между статическими и астатическими регуляторами в этом отношении состоит только в том, что *вредная подвижность статических регуляторов может быть исправлена посредством катаракта, надлежащим образом устроенного, между тем как излишняя подвижность астатических регуляторов никаким катарактом исправлена быть не может.*

будет непременно иметь размахи, увеличивающиеся с течением времени *безгранично*, не должно понимать в буквальном смысле. Собственно, это заключение означает только, что регулятор, для которого сказанное условие не исполнено, будет совершать размахи бо́льшие, чем тот предел, при котором в теории этого регулятора можно отбрасывать члены второго и высших порядков. Весьма легко может случиться, что в действительности данный регулятор, не исполняющий условия

$$xy < 1,$$

будет увеличивать свои размахи лишь до известного предела *, но как этот предел, по сказанному выше, будет значительнее того, при котором вторые степени размахов могут быть отброшены сравнительно с первыми, то для машин, требующих значительной равномерности, очевидно, рассматриваемый регулятор годиться не будет, так что практическое следствие теории остается то же самое, как и в том случае, когда бы предположения, служащие основанием изложенной теории, исполнялись в действительности с совершенной точностью. [19]

* Это обстоятельство не было в достаточной степени принято во внимание Г. Карглем в его статье, о которой говорилось в предыдущем параграфе, и от того его доказательство негодности астатических регуляторов не строго: Г. Каргль в упомянутой статье вовсе не рассматривает способ действия регулирующего прибора и считает возможным, следовательно, сделать свое заключение, *каково бы ни было действие этого прибора*. Между тем, это, очевидно, не верно; чтобы заключение Г. Каргля было справедливо, необходимо допустить, что изменение движущего момента, производимое регулирующим прибором, пропорционально первой степени перемещения регулятора. Несмотря, впрочем, на эти замечания, необходимо признать, что Г. Каргль своею статьею 1873 г., равно как и своими предыдущими статьями, 1871 и 1872 гг., помещенными в Civilingenieur, пролил много света на многие важные пункты теории регуляторов.

Заметим также, что вредная подвижность регуляторов может быть в действительности до известной степени уменьшена влиянием вредных сопротивлений, встречающихся при движении регулятора и регулирующего прибора, и которыми мы пренебрегали, но в регуляторах такого рода уменьшение *вредной* подвижности соединяется с уменьшением и *полезной* их подвижности, т. е. *чувствительности*, которой, как видно из § 6, невозможно достигнуть в значительной степени иначе как под условием возможного уменьшения вредных сопротивлений. [20]

12. При выводе предыдущих заключений между прочим предположено было, что сопротивление катаракта пропорционально первой степени скорости муфты регулятора, а потому можно сомневаться в правильности некоторых положений изложенной теории в случае, если эта гипотеза будет не верна.

Но какие бы сомнения ни возбуждались относительно этого предмета, во всяком случае они не могут касаться той части заключений, которая относится к регуляторам, могущим хорошо действовать. На самом деле, так как отверстие, через которое должна протекать жидкость, вытесняемая поршнем катаракта, может быть по произволу увеличиваемо и уменьшаемо, то и тормозящее действие катаракта на муфту регулятора может быть сделано столь велико, как угодно, а следовательно, во всяком случае размахи статического регулятора можно всегда ограничить посредством катаракта, надлежащим образом устроенного и установленного. Что же касается регуляторов *точно астатических*, то нетрудно показать, что относящееся к ним заключение будет справедливо даже и в том случае, если сопротивление катаракта пропорционально не первой, а какой угодно высшей степени скорости. Действительно, допустим, что размахи астатического регулятора могут быть ограничены при помощи катаракта, сопротивление которого выражается через

$$M'\left(\frac{du}{dt}\right)^n,$$

где $n > 1$. При употреблении такого катаракта, согласно допущению, $\frac{du}{dt}$ не будет возрастать беспредельно и, следовательно, достигает некоторого наибольшего значения, которое назовем через V; вообразим затем, что к тому же регулятору приспособлен другой катаракт, который сообщает муфте ускорение, направленное в сторону, противоположную ее движению, и выражающееся через

$$M'V^{n-1}\left(\frac{du}{dt}\right).$$

Так как эта величина численно больше, чем $M'\left(\frac{du}{dt}\right)^n$, то, очевидно, новый катаракт будет иметь более сильное тормозящее действие, чем катаракт, который первоначально дан для рассмотрения, и, следовательно, перемещение муфты регулятора, под его влиянием совершающееся для каждого данного времени, будет меньше, чем соответствующее перемещение той же муфты под влиянием данного катаракта. Поэтому если данный катаракт может ограничить размахи муфты, то тем более это действие будет произведено вновь приспособленным катарактом. Таким образом, если катаракт, замедляющее действие которого на муфту численно выражается ускорением $M'\left(\frac{du}{dt}\right)^n$ (где $n > 1$), может сделать астатический регулятор годным к употреблению, то того же результата можно достигнуть через употребление катаракта, замедляющее действие которого на муфту выражается ускорением, имеющим величину $M'V^{n-1}\left(\frac{du}{dt}\right)$. Но это последнее по доказанному невозможно, так как ускорение муфты от такого регулятора происходит пропорционально первой степени $\left(\frac{du}{dt}\right)$, следова-

тельно, сделанное здесь допущение также невозможно, что и требовалось доказать. [21]

13. Изложенная теория, независимо от найденных уже результатов, дает возможность найти величину того предела, к которому стремится угловая скорость машины, снабженной правильно действующим регулятором, когда, вследствие нарушения равновесия между силой и сопротивлением, скорость ее начинает изменяться. Предел этот прямо находится из уравнения (1), если поставим на место u предел, к которому эта величина постепенно приближается. Обозначая искомый предел скорости через $\omega_{\lim}$, а предел u — через $u_{\lim}$, находим

$$\omega_{\lim} = \omega_0 \left(1 + \frac{N}{K} u_{\lim}\right),$$

а вставляя вместе $u_{\lim}$ величину $\frac{(p - Q)\rho}{L}$,

получим:

$$\omega_{\lim} = \omega_0 \left[1 + \frac{N}{KLg}(p - Q)\rho\right] = \omega_0 \left[1 + \frac{N}{K}\frac{(p - Q)\rho}{Lg}\right].$$

Заметим, что $p\rho$ есть нормальный движущий момент машины, которую рассматриваем, и, следовательно, если обозначим Ch нормальную силу машины в паровых лошадях, то

$$p\rho = 75\frac{Ch}{\omega_0}.$$

Если назовем изменение, происшедшее в силе машины, которое, со своей стороны, произвело рассматриваемое нами нарушение равновесия в регуляторе, через $m \cdot Ch$, то, очевидно, будет:

$$(p - Q)\rho = 75\frac{m \cdot Ch}{\omega_0},$$

и, следовательно,

$$\omega_{\lim} = \omega_0 + \frac{N}{KLg} 75 \cdot m \cdot Ch = \omega_0 \left\{ 1 + \frac{N}{K} \frac{75 \cdot m \cdot Ch}{Lg\omega_0} \right\}.$$

Это выражение показывает, что допускаемое регулятором относительное изменение скорости

$$\frac{\omega_{\lim} - \omega_0}{\omega_0} = \frac{N}{K} \frac{75 \cdot m \cdot Ch}{Lg\omega_0}$$

будет тем меньше и, следовательно, регулятор будет тем лучше исполнять свое назначение, чем:

1) меньше будет N, т. е. чем ближе регулятор будет к астатическому, с которым, однако, по доказанному, он никогда совпадать не должен;

2) больше будет KL, т. е. чем больше будет быстрота действия регулятора;

3) меньше будут изменения, претерпеваемые силой машины (чем меньше $m \cdot Ch$);

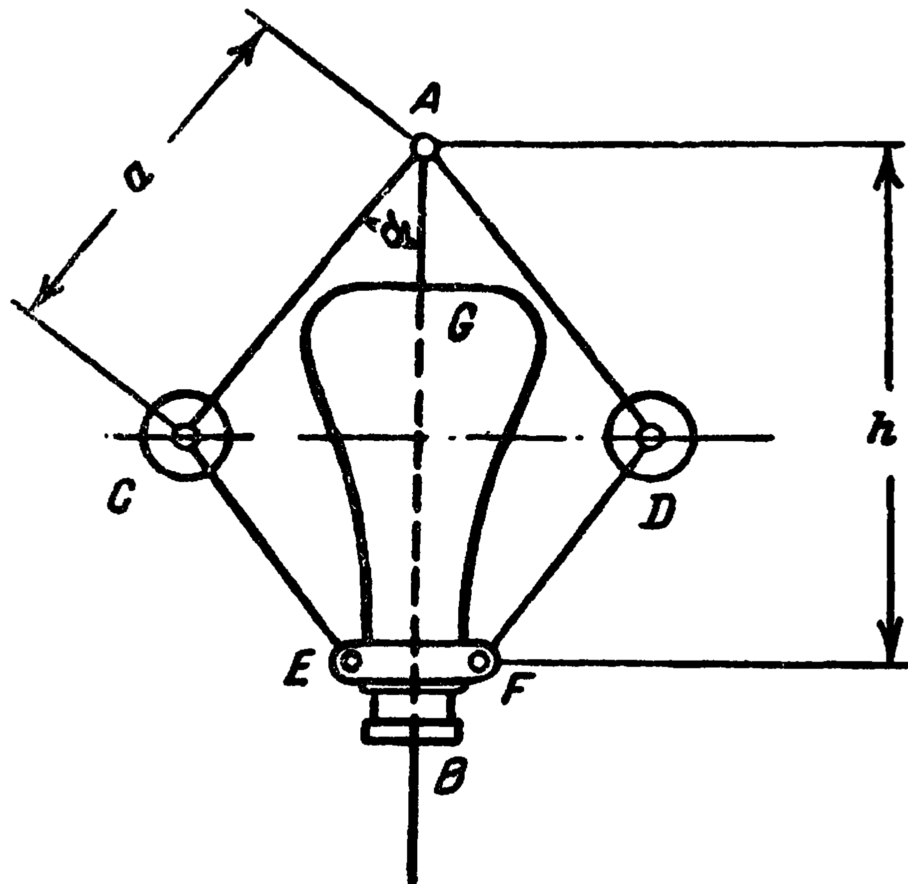
4) больше будет угловая скорость ω.

Все эти обстоятельства необходимо иметь в виду при проектировании регуляторов, так как от них требуется не только, чтобы они, при нарушении равновесия между силой и сопротивлением, приводили машину постепенно к новому равновесному состоянию, соответствующему измененному напряжению преодолеваемого сопротивления, но от них требуется также, чтобы это новое равновесное состояние по скорости, которую имеет при нем машина, отличалось от нормального на известную небольшую величину, значение которой определяется степенью важности равномерного хода для того производства, для которого назначается машина.

Необходимо заметить также, что величина предельной скорости нисколько не зависит от силы катаракта, точно так же, как от нее не зависит и чувствительность регулятора. Таким образом усиление катаракта ни в чем не вредит

действию регулятора,[22] между тем оно в высшей степени полезно, так как дозволяет сделать хороший регулятор с незначительной устойчивостью,[23] что влечет за собой, как следствие, малую разность между предельной скоростью машины при измененной работе и нормальной величиной скорости, имеющей место при нормальной работе машины.

14. В виде приложения изложенной общей теории рассмотрим один из наиболее употребительных регуляторов, а именно так называемый регулятор Портера, составляющий видоизменение регулятора Ватта [24] и представляющий собой, как известно, ось AB (фиг. 2), которая приводится от машины во вращательное движение и к которой в точке A посредством шарниров привешены бруски AC и AD, несущие на своих концах шары C и D, посредством шарниров же соединенные с брусками CE и DF; последние подвешены к муфте, могущей иметь прямолинейное движение вдоль оси. С муфтой соединен еще особый груз G, имеющий одинаковое с нею движение. Для большей простоты предположим, что нижние стержни CE и DF сочленены с муфтой одним шарниром, лежащим на оси AB, и что все четыре стержня, идущие от оси к шарам, будут одинаковой длины. Назовем общую их длину через a, вес каждого из шаров — через P, вес груза, соединенного с муфтой, через G, и пренебрежем массой стержней сравнительно с массами шаров и противовеса G. Вообразим затем, что машина вращается со своей нормальной



Фиг. 2.

скоростью ω_0, а ось регулятора — со скоростью $q\omega_0$, и что при этом муфта находится в равновесии. Одинаковую величину углов, которые при этом составляют с осью регулятора все четыре стержня, назовем через α_0 и расстояние верхнего и нижнего шарниров, на оси регулятора лежащих, обозначим через h. Очевидно, что между h, a и α_0 имеется геометрическая зависимость такого вида:

$$h = 2a\cos\alpha_0.$$

А как при угловой скорости $q\omega_0$ оси регулятора муфта находится в равновесии, и катаракт, очевидно, не действует, то сумма возможных работ центробежной силы шаров, их веса и веса груза G, вычисленных в предположении, что углы α_0 увеличились на бесконечно-малую величину, должна равняться нулю; из этого равенства тотчас получим

$$\frac{q^2\omega_0^2}{g} = \frac{P+G}{P}\,\frac{1}{a\cos\alpha_0} = \frac{P+G}{P}\,\frac{2}{h}. \tag{A}$$

Если затем вообразим регулятор в другом положении, при котором муфта его поднялась на величину u, и назовем через $q\omega_u$ то значение угловой скорости оси регулятора, при котором его муфта в этом положении может оставаться в равновесии, а через α — величину углов, составляемых при этом стержнями с осью, то получим точно так же, как прежде,

$$h - u = 2a\cos\alpha,$$

и

$$\frac{q\omega_u^2}{g} = \frac{P+G}{P}\cdot\frac{1}{a\cos\alpha} = \frac{P+G}{P}\,\frac{2}{h-u}, \tag{B}$$

а отсюда

$$q\omega_u = \sqrt{\frac{P+C}{P}}\sqrt{\frac{2g}{h-u}}.$$

Развертывая это выражение в строку по степеням u и сохраняя члены не выше первой степени u, найдем:

$$q\omega_u = \sqrt{\frac{P+G}{P}}\sqrt{\frac{2g}{h}} + \frac{u}{2}\sqrt{\frac{P+G}{P}}\sqrt{\frac{2g}{h^3}} = q\omega_0\left(1+\frac{u}{2h}\right),$$

откуда прямо заключаем

$$\frac{\omega_u - \omega_0}{\omega_0} = \frac{u}{2h}. \qquad \text{(C)}$$

15. Если далее предположим, что регулятор, имея муфту, удаленную от своего нормального положения на величину u, имеет скорость $q\omega$, то в этом положении муфта его в равновесии не будет и, следовательно, работа всех сил, к нему приложенных, вычисленная для бесконечно-малого изменения величины u, будет равна получаемому при этом изменении приращению живой силы шаров и груза G. Это приращение живой силы будет, очевидно,

$$d\left\{\frac{G}{2g}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \frac{2P}{2g}\left(\frac{ad\alpha}{dt}\right)^2\right\}.$$

Это выражение легко представить в более удобном для рассмотрения виде. Выше было найдено, что

$$h - u = 2a\cos\alpha$$

и, следовательно,

$$du = 2a\sin\alpha\, d\alpha,$$

а потому

$$\frac{ad\alpha}{dt} = \frac{1}{2\sin\alpha}\frac{du}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{1-\left(\frac{h-u}{2a}\right)^2}}\frac{du}{dt},$$

так что дифференциал живой силы шаров и груза G приводится к виду

$$d\left\{\frac{G}{2g}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \frac{2P}{2g}\frac{1}{4\left\{1-\left(\frac{h-u}{2a}\right)^2\right\}}\left(\frac{du}{dt}\right)^2\right\} =$$

$$=\left\{\frac{du}{dt}\frac{d^2u}{dt^2}\left[\frac{G}{g}+\frac{2P}{g}\,\frac{1}{4\left\{1-\left(\frac{h-u}{2a}\right)^2\right\}}\right]-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{du}{dt}\right)^3\frac{2P}{g}\,\frac{1}{4\left\{1-\left(\frac{h-u}{2a}\right)^2\right\}^2}\,\frac{h-u}{(2a)^2}\right\}dt.$$

Силы, которых элементарная работа равна этому приращению живой силы, если пренебрежем вредными сопротивлениями регулятора и регулирующего прибора, будут:

1) центробежная сила обоих шаров, доставляющая работу:

$$\frac{2P}{g}q^2\omega^2 a\sin\alpha\, a\cos\alpha\, d\alpha=\frac{P}{g}q^2\omega^2(h-u)\frac{du}{2}=\frac{P}{g}q^2\omega^2\frac{h-u}{2}\frac{du}{dt}dt;$$

2) вес шаров, доставляющий работу:

$$-2Pa\sin\alpha\, d\alpha=-Pdu=-P\frac{du}{dt}dt;$$

3) вес груза G, доставляющий работу:

$$-Gdu=-G\frac{du}{dt}dt;$$

4) сопротивление катаракта, которое, будучи отнесено к муфте, как точке приложения, может быть выражено вообще через $\frac{S}{g}\frac{du}{dt}$ и доставит работу:

$$-\frac{S}{g}\frac{du}{dt}du=-\frac{S}{g}\left(\frac{du}{dt}\right)^2dt.$$

Приравнивая сумме всех этих работ найденное бесконечно-малое приращение живой силы, мы без труда усмотрим, что все части полученного уравнения будут содержать в се-

бе множителем $\frac{du}{dt}$, который сокращается, и затем уравнение приводится к виду:

$$\frac{d^2u}{dt^2}\left[\frac{G}{g}+\frac{2P}{g}\frac{1}{4\left\{1-\left(\frac{h-u}{2a}\right)^2\right\}}\right]-$$

$$-\left(\frac{du}{dt}\right)^2\frac{2P}{g}\frac{1}{4\left\{1-\left(\frac{h-u}{2a}\right)^2\right\}^2}\frac{h-u}{(2a)^2}=\frac{P}{g}q^2\omega^2\frac{h-u}{2}-$$

$$-(P+G)-\frac{S}{g}\frac{du}{dt}.$$

Из уравнения же (B) имеем, очевидно,

$$0=\frac{P}{g}q^2\omega_u^2\frac{h-u}{2}(P+G),$$

а потому предыдущее равенство приводится к следующему:

$$\frac{P}{g}q^2(\omega^2-\omega_u^2)\frac{h-u}{2}-\frac{S}{g}\frac{du}{dt}+$$

$$+\left(\frac{du}{dt}\right)^2\frac{2P}{g}\frac{1}{4\left\{1-\left(\frac{h-u}{2a}\right)^2\right\}^2}\frac{h-u}{(2a)^2}=$$

$$=\frac{d^2u}{dt^2}\left[\frac{G}{g}+\frac{2P}{g}\frac{1}{4\left\{1-\left(\frac{h-u}{2a}\right)^2\right\}}\right].$$

По предположению, $\frac{du}{dt}$ есть величина малая, квадратом которой можно пренебречь в наших вычислениях. Сверх того очевидно, что

$$\omega^2-\omega_u^2=2\omega_0^2\frac{\omega-\omega_u}{\omega_0}+\omega_0^2\frac{\omega-\omega_u}{\omega_0}\cdot\frac{\omega-\omega_0}{\omega_0}-\omega_0^2\frac{\omega-\omega_u}{\omega_0}\cdot\frac{\omega_0-\omega_u}{\omega_0},$$

а так как выражения $\frac{\omega-\omega_0}{\omega_0}$, $\frac{\omega-\omega_u}{\omega_0}$ и $\frac{\omega_0-\omega_u}{\omega_0}$ суть малые дроби, которых произведения суть величины второго порядка, нами отбрасываемые, то предыдущее равенство может быть написано в таком виде:

$$\frac{P}{g}\,q^2\omega_0^2(h-u)\,\frac{\omega-\omega_u}{\omega_0}-\frac{S}{g}\frac{du}{dt}=$$
$$=\frac{d^2u}{dt^2}\left[\frac{G}{g}+\frac{2P}{g}\,\frac{1}{4\left\{1-\left(\frac{h-u}{2a}\right)^2\right\}}\right].$$

Определяя отсюда $\frac{d^2u}{dt^2}$, развертывая полученное выражение в строку по степеням u, отбрасывая члены второго и высших порядков относительно u, $\frac{du}{dt}$, $\frac{\omega-\omega_0}{\omega_0}$ и заменяя ω_u его величиной, следующей из уравнения (C), получим:

$$\frac{d^2u}{dt^2}=\frac{P}{G+\frac{P}{2\left(1-\frac{h^2}{4a^2}\right)}}\,q^2\omega^2h\,\frac{\omega-\omega_0}{\omega_0}-\frac{{}^1/_2P}{G+\frac{P}{2\left(1-\frac{h^2}{4a^2}\right)}}\,q^2\omega_0^2u-$$
$$-\frac{S}{G+\frac{P}{2\left(1-\frac{h^2}{4a^2}\right)}}\,\frac{du}{dt}. \qquad \text{(D)}$$

Дифференцируя только что написанное уравнение по времени t и выключая $\frac{d\omega}{dt}$ посредством равенства (4), выведенного в § 5, получим:

$$\frac{d^3u}{dt^3}=\frac{P}{G+\frac{P}{2\left(1-\frac{h^2}{4a^2}\right)}}\,q^2\omega_0^2h\,\frac{(p-Q)\rho}{I\omega_0}-$$

$$-\frac{P}{G+\dfrac{P}{2\left(1-\dfrac{h^2}{4a^2}\right)}}\,\frac{q^2\omega_0^2}{2}\,\frac{du}{dt}-\frac{S}{G+\dfrac{P}{2\left(1-\dfrac{h^2}{4a^2}\right)}}\,\frac{d^2u}{dt^2}-$$

$$-\frac{P}{G+\dfrac{P}{2\left(1-\dfrac{h^2}{4a^2}\right)}}\,q^2\omega_0^2\,\frac{Lh}{I\omega_0}\,u.$$

Выключая отсюда $q^2\omega_0^2$ посредством уравнения (А) и полагая затем

$$\frac{2(P+G)}{G+\dfrac{P}{2\left(1-\dfrac{h^2}{4a^2}\right)}}=K;\quad \frac{P+G}{G+\dfrac{P}{2\left(1-\dfrac{h^2}{4a^2}\right)}}\,\frac{g}{h}=N;$$

$$\frac{S}{G+\dfrac{P}{2\left(1-\dfrac{h^2}{4a^2}\right)}}=M,$$

найдем, что предыдущее уравнение представится в виде:

$$\frac{d^3u}{dt^3}+M\frac{d^2u}{dt^2}+N\frac{du}{dt}+\frac{KIg}{I\omega_0}u=Kg\frac{(P-Q)\rho}{I\omega_0},$$

т. е. примет тот самый вид, который найден в общей теории вообще для всех регуляторов прямого действия, а следовательно, все заключения, там выведенные, будут вполне приложимы к регулятору Портера. [25]

Так как выведенное в общей теории условие правильного действия регулятора состоит в том, чтобы было

$$MN-\frac{KIg}{I\omega_0}>1,$$

то и заключаем, что для правильности действия регулятора Портера необходимо, чтобы было

$$\frac{S}{G+\frac{P}{2\left(1-\frac{h^2}{4a^2}\right)}} > \frac{2Lh}{I\omega_0} \quad \text{или} \quad S > \frac{2lh}{I\omega_0}\left(G+\frac{P}{2\left(1-\frac{h^2}{4a^2}\right)}\right).$$

16. Если машина и регулятор, а также катаракт и передача от регулятора к регулирующему прибору известны, то, на основании предыдущего, можно будет определить вполне действие регулятора, а именно: из уравнения (A)

$$\frac{q^2\omega_0^2}{g} = \frac{P+G}{P}\,\frac{2}{h}$$

найдется нормальная угловая скорость машины ω_0. Затем, так как все величины, входящие в неравенство, определяющее S, будут известны, то можно проверить, будет ли катаракт достаточно силен, чтобы регулятор мог правильно действовать. Также можно найти и ту предельную скорость, к которой регулятор приводит машину в случае изменения ее силы. Эта скорость, если сохраним все прежние обозначения, будет:

$$\omega_0\left(1+\frac{75\cdot m\cdot Ch}{2Lh\omega_0}\right),$$

откуда видно, что предельная скорость, к которой стремится при изменении своей силы машина, снабженная регулятором Портера, разнится от нормальной скорости машины, и что отношение этой разности к величине нормальной скорости тем меньше, чем больше сила регулятора, чем больше его высота и чем больше угловая скорость машины. От веса же шаров и муфты рассматриваемая разность вовсе не зависит; но эти величины оказывают существенное влияние на другие свойства регулятора: его угловую скорость ($q\omega_0$), его подвижность (K), быстроту его действия (KL), его чувствительность $\left(\frac{Kg}{R'+R''}\right)$, его устойчивость ($N$) и силу катаракта ($M$).

17. В выражении чувствительности регулятора, т. е. в дроби

$$\frac{Kg}{R' + R''}$$

величины R' и R'' представляют собой, согласно обозначениям § 6, частные от разделения вредных сопротивлений регулятора и регулирующего прибора на массу регулятора, приведенную к муфте. Поэтому, если обозначим соответственно через R_1 и R_2 величины вредных сопротивлений регулятора и регулирующего прибора, приведенные к муфте регулятора, то будет

$$R' + R'' = \frac{R_1 + R_2}{G + \frac{P}{2\left(1 - \frac{h^2}{4a^2}\right)}}\, g.$$

Вставляя эту величину в выражение чувствительности регулятора и заменяя в ней K его значением, мы получим, что вообще чувствительность регулятора изобразится через

$$\frac{2(P + G)}{R_1 + R_2}.$$

Входящая сюда величина R_2 не может быть определена, пока неизвестно устройство регулирующего прибора. Что же касается величины R_1, то ее легко определить в данном случае. Действительно, вредные сопротивления регулятора будут состоять из трений на осях шарниров, которые возбуждаются в то время, как угол стержней регулятора с осью изменяется. Если назовем через X напряжение верхнего стержня регулятора, через Y — напряжение нижнего его стержня, через δ — предполагаемый одинаковым диаметр осей всех шарниров, через f — коэффициент трения на этих шарнирах, то, очевидно, работа трения при изменении угла стержня с осью на $d\alpha$ будет:

$$2f(X + Y)\,\delta d\alpha,$$

а следовательно, изображающее эти вредные сопротивления давление на муфту будет

$$R_1=2f(X+Y)\,\delta\,\frac{dx}{du}\,.$$

Величина $X+Y$ определяется легко из того условия, что напряжения X и Y должны уравновешивать центробежную силу шаров и их вес. На основании этого прямо получается

$$X+Y=\frac{P}{g}\,q^2\omega^2 a$$

или, заменяя здесь ω через ω_0, от которого действительная угловая скорость никогда значительно не разнится, выключая величину $q^2\omega_0^2$ с помощью уравнения (А) и величину $\frac{dx}{du}$ с помощью уравнения

$$h-u=2a\cos\alpha,$$

заменяя сверх того α на α_0, мы получим

$$R_1=4f\,(P+G)\,\frac{\delta}{h\sin\alpha_0}\,.$$

Поэтому чувствительность регулятора изобразится через

$$\frac{2(P+G)}{(P+G)\,\dfrac{4f\delta}{h\sin\alpha_0}+R_2}=\frac{1}{\dfrac{2f\delta}{h\sin\alpha_0}+\dfrac{R_2}{2\,(P+G)}}\,.$$

Если обозначим общий вес регулятора, т. е. совокупный вес шаров и груза, сидящего на муфте, через T, а отношение веса груза на муфте к общему весу через z, то получим следующее выражение чувствительности регулятора Портера

$$\frac{1}{\dfrac{2f\delta}{h\sin\alpha_0}+\dfrac{R_2}{T\,(1+z)}}\,,$$

из которого видно, что чувствительность регулятора увеличивается с увеличением:

общего веса регулятора,

веса муфты за счет веса шаров,

высоты регулятора,

угла, составляемого стержнями с осью, и с уменьшением коэффициента трения на шарнирах и диаметра шарниров.

То же выражение показывает, что чувствительность регулятора не может через увеличение его веса быть увеличиваема далее известного предела, который будет:

$$\frac{h \sin \alpha_0}{2f\delta}.$$

Если принять $h = 500$ мм, $\alpha_0 = 30^\circ$, $f = 0.05$, $\delta = 5$ мм, то предел степени чувствительности изобразится числом 500, т. е. отступление от нормальной скорости, при котором регулятор мог бы начать действовать, если бы общий вес его сделать бесконечно большим, составляет $\frac{1}{500}$ нормальной скорости.

Само собой понимается, что до этого предела чувствительности никогда дойти нельзя, а придется принять чувствительность значительно более слабую. Так, допуская принятые уже величины и предполагая, что $\frac{T}{R_2} = 50$, получим, что в действительности чувствительность регулятора будет выражаться числами:

$$45.5 \text{ — при } z = 0,$$

$$79.8 \text{ — при } z = 9/10,$$

откуда видно, как значительно увеличивается чувствительность регулятора вместе с увеличением веса муфты за счет веса шаров.

20. Рассматривая затем выражение для K, которое представляет подвижность регулятора и которому пропорцио-

нальна быстрота его действия, вводя обозначения предыдущего параграфа и называя для краткости дробь

$$\frac{1}{2\left(1-\frac{h^2}{4a^2}\right)}$$

через β, получим, что K может быть выражено таким образом:

$$K=\frac{2(1+z)}{\beta+(2-\beta)z}.$$

Производная этого выражения по z будет

$$\frac{4(\beta-1)}{[\beta+(2-\beta)z]^2},$$

откуда видно, что если $\beta>1$, т. е. если $h^2>2a^2$*, то с увеличением z (т. е. с увеличением веса муфты за счет веса шаров) подвижность и быстрота действия регулятора возрастают. Напротив, если $\beta<1$, т. е. если $h^2<2a^2$**, то с увеличением веса муфты за счет шаров и подвижность и быстрота действия регулятора убывают, если же $\beta=1$, т. е. если угол между стержнями регулятора, имеющий вершину на оси, равен прямому, то K не зависит от отношения между весом шаров и весом муфты, представляя собой величину постоянную и равную 2. Независимо от этого, из выражения для K видно, что с увеличением β, т. е. с возрастанием $\frac{h^2}{a^2}$, подвижность регулятора и быстрота его действия увеличиваются. Но это влияние β будет тем меньше, чем ближе z к единице; и так как с целью увеличения чувствительности регулятора величина z обыкновенно лишь немного меньше

* Или, что то же, если угол между стержнями, имеющий вершину на оси, менее прямого.

** Или, что то же, если угол между стержнями, имеющий вершину на оси, более прямого.

единицы, то малые изменения в β не оказывают на рассматриваемые свойства регулятора заметного влияния.

Что касается величины N, представляющей собою устойчивость регулятора, то ее выражение, содержащееся в § 18,[26] с помощью обозначения предыдущего параграфа может быть написано в таком виде:

$$N = \frac{1+z}{\beta+(2-\beta)z} \frac{g}{h},$$

откуда видно, что устойчивость регулятора возрастает вместе с подвижностью и сверх того зависит от высоты регулятора, с увеличением которой устойчивость уменьшается. Должно заметить, что эта последняя зависимость есть самая важная, так как, согласно выведенному в § 16, разница между предельной скоростью, соответствующей измененной силе машины, и нормальной скоростью не зависит ни от β, ни от z, но существенно зависит от высоты регулятора.

Величина M, наименованная силою катаракта, с помощью выведенных обозначений может быть приведена к следующему виду:

$$\frac{2S}{T} \frac{1}{\beta+(2-\beta)z},$$

откуда видно, что сила данного катаракта уменьшается с увеличением общего веса регулятора и с увеличением β, хотя с изменением последнего, при значительных величинах z, сила катаракта изменяется незначительно. Но эта сила катаракта существенно зависит от z, а именно: если $\beta < 2$, т. е. если $\frac{h^2}{a^2} < 3$ (или если угол между стержнями регулятора, имеющий вершину на оси, более 60°), то с увеличением z сила катаракта уменьшается; если же угол между стержнями регулятора менее 60°, то, наоборот, сила катаракта с увеличением веса муфты за счет шаров увеличивается.

Рассматривая, наконец, нормальную угловую скорость регулятора, находим, что уравнение, ее определяющее, с помощью введенных обозначений, представляется в следующем виде:

$$\frac{q^2\omega_0^2}{g} = \frac{1+z}{1-z}\frac{2}{h}$$

Из этого уравнения видно, что угловая скорость уменьшается вместе с увеличением высоты регулятора и возрастает с увеличением веса муфты за счет шаров. Эта последняя зависимость очень важна, так как ω_0 с увеличением z увеличивается весьма быстро. Так, если положить сначала $z = 0$ (регулятор Уатта) и затем $z = 0.9$ (обыкновенное отношение в регуляторе Портера), то угловая скорость для второго случая будет в 4.36 раза больше, чем в первом случае.

21. На основании изложенного выше нетрудно найти правила для составления проекта регулятора. Для этого необходимо иметь те условия, при которых регулятор действует, и те цели, которых желательно посредством его достигнуть, а именно, необходимо знать:

1) нормальную угловую скорость машины (ω_0);

2) наибольшее ожидаемое при ее действии изменение ее силы ($m \cdot Ch$);

3) требуемую от регулятора чувствительность $\frac{\omega_0}{\omega' - \omega_0}$, которую обозначим через k;

4) требуемую степень равномерности $\left(\frac{\omega_0}{\omega_{1\,m} - \omega_0}\right)$, т. е. отношение между нормальной скоростью и отступлением от нее предельной скорости, к которой машина стремится при наибольшем ожидаемом изменении ее силы; эту степень равномерности мы обозначим через i.

Имея эти данные, мы получаем, согласно приведенному выше, следующие соотношения:

$$\frac{1}{k} = \frac{2f\delta}{h\sin\alpha_0} + \frac{R_2}{T(1+z)}, \tag{1}$$

$$\frac{1}{i} = \frac{75m\cdot Ch}{2L.h\,\omega_0}, \tag{2}$$

$$\frac{q^2\omega_0^2}{g} = \frac{1+z}{1-z}\,\frac{2}{h}, \tag{3}$$

которые должны быть удовлетворены. Независимо от этого необходимо выполнить условия, чтобы перемещения муфты регулятора были действительно очень малы. Для этого всего удобнее задать себе ту величину перемещения регулятора, при которой работа машины обращается в нуль; называя такое перемещение через nh, мы, очевидно, получим

$$Lnh = p\rho$$

или

$$Lnh\,\omega_0 = 75\cdot Ch. \tag{4}$$

Наконец, должно быть еще исполнено условие, относящееся к катаракту и приводящееся к виду:

$$S > \frac{Lh}{l\omega_0}\,T\,[\beta + (2-\beta)\,z]. \tag{5}$$

Заметим, что четыре написанные уравнения не независимы между собой, так как соединение (2) и (4) дает отношение между величинами, которые считаются за данные, а именно получаем равенство

$$mn = \frac{2}{i},$$

которое и заменит уравнение (4) и из которого прежде всего необходимо определить n и убедиться, что оно не составляет слишком большой величины. Принимая, например, $m = 0.5$ и $i = 40$, находим отсюда $n = 0.1$, откуда видно, что если требуется значительная степень равномерности машины даже при очень больших изменениях ее силы, то размахи регуляторов выходят небольшие.

Определив n, согласно сказанному, мы получаем три уравнения (1), (2), (3) и неравенство (5), которым должно удовлетворить посредством входящих туда величин

$$L, h, T, z, q, S.$$

Так как неравенство (5) может быть всегда удовлетворено посредством приличного выбора S, то остается удовлетворить уравнениям (1), (2), (3) посредством приличного выбора пяти остальных величин, из которых, следовательно, две могут быть назначены соображаясь с удобствами конструкции и действия, а остальные могут быть найдены из рассматриваемых уравнений. Обыкновенно будет удобнее всего задать h и z, т. е. высоту регулятора и отношение веса муфты к общему весу регулятора, и определить величины

$$q, T, L,$$

из которых первая определит передачу от главного вала машины к оси регулятора, вторая даст общий вес регулятора, а величину L нужно принять в соображение при устройстве привода от муфты регулятора к регулирующему прибору.

В разобранные уравнения вовсе не входит угол стержней регулятора с осью, а следовательно, величина его может быть назначена соображаясь с удобствами конструкции, обыкновенно же угол этот бывает от 30 до 45°. [27]

Изложенные исследования приводят к некоторым результатам, имеющим существенное значение как для теории регуляторов, так и для практического их употребления. Главнейшие из этих результатов заключаются в следующем:

1. Все вообще регуляторы с течением времени увеличивают размахи колебаний, которые они получают при нарушении равновесия между силой и сопротивлением машины. Применение катаракта вообще представляет весьма действи-

тельное средство к ограничению этих размахов, которое притом не оказывает вредного влияния ни на чувствительность регулятора, ни на степень равномерности движения машины, так что *катаракт есть существенная принадлежность чувствительного и правильно действующего регулятора прямого действия.* [28]

2. Если под именем *астатического* регулятора разуметь такой, для которого разность между равновесными скоростями, соответствующими различным положениям регулятора, будучи развернута в строку по степеням расстояния этих положений, не заключает первой степени сего расстояния, то размахи такого регулятора не могут быть ограничены посредством катаракта, сколь бы он силен ни был, и потому *астатические регуляторы даже и с катарактом не должны быть употребляемы.* [29]

3. Степень равномерности движения, доставляемого регулятором, существенно зависит от изменений, могущих иметь место в сопротивлении, преодолеваемом машиной. Изложенная теория дает эту зависимость, которая должна быть принимаема в соображение при устройстве регулятора: иначе он может вовсе не достигать своей цели.

4. На действие регулятора оказывают существенное влияние количества, наименованные в изложенной теории *подвижностью, силой* и *устойчивостью регулятора.* Количества эти определяются устройством регулятора, регулирующего прибора и передачи между ними: с помощью сих количеств легко находится как действие уже построенного регулятора, так и устройство регулятора проектируемого, долженствующего удовлетворять наперед заданным условиям.

И. А. ВЫШНЕГРАДСКИЙ



ДОПОЛНЕНИЕ К РАБОТЕ

О РЕГУЛЯТОРАХ ПРЯМОГО ДЕЙСТВИЯ[1]



И. А. ВЫШНЕГРАДСКИЙ

ДОПОЛНЕНИЕ К РАБОТЕ „О РЕГУЛЯТОРАХ ПРЯМОГО ДЕЙСТВИЯ“

Ueber directwirkende Regulatoren (§ 14)
von I. Wischnegradski,
Professor am technologischen Institut in St. Petersburg

Der Civilingenieur Bd. XXIII, 1877, стр. 116—119.



ДОПОЛНЕНИЕ К РАБОТЕ О РЕГУЛЯТОРАХ ПРЯМОГО ДЕЙСТВИЯ[1]



Из дифференциальных уравнений теории, развитой в работе „О регуляторах прямого действия", кроме других следствий, может быть полностью определен закон, по которому изменяется скорость машины после нарушения равновесия между движущей силой и сопротивлением. Для этой цели достаточно исключить величину u из системы уравнений[2]

$$\frac{d^2u}{dt^2}+M\frac{du}{dt}+Nu=Kg\,\frac{\omega-\omega_0}{\omega_0};\qquad I\frac{d\omega}{dt}=(p-Q)\,\rho-Lu,$$

что приводит к уравнению:

$$\frac{d^3(\omega-\omega_0)}{dt^3}+M\frac{d^2(\omega-\omega_0)}{dt^2}+N\frac{d(\omega-\omega_0)}{dt}+$$
$$+\frac{KLg}{I\omega_0}(\omega-\omega_0)=N\omega_0\frac{(p-Q)\,\rho}{I\omega_0}.$$

Решение этого дифференциального уравнения зависит от корней того самого кубического уравнения, с которым мы имели дело при отыскании u, а произвольные постоянные нужного нам решения определятся здесь теми условиями, что при $t=0$ $\omega-\omega_0=0$, $\dfrac{d(\omega-\omega_0)}{dt}=\dfrac{(p-Q)\,\rho}{I}$, $\dfrac{d^2(\omega-\omega_0)}{dt^2}=0$.

Из общего выражения интеграла написанного выше уравнения можно сделать те же выводы относительно изменения со временем величины $\omega - \omega_0$, какие были сделаны относительно величины u в § 9—12 работы „О регуляторах прямого действия".

Не повторяя этих общих выводов, мы хотим здесь несколько подробнее рассмотреть тот случай, когда два корня характеристического уравнения комплексны и при этом действительная часть этих корней отрицательна. Этот случай как раз соответствует тем регуляторам, которые, как легко можно увидеть из предшествующего изложения, наилучшим образом приспособлены к поддержанию равномерного хода машин.

Если мы сохраним все введенные ранее обозначения и обозначим единственный действительный корень кубического уравнения через θ', то получим для $\omega - \omega_0$ выражение:[3]

$$\omega_0 \frac{N(p-Q)\rho}{KLg} + Ce^{\theta' t} + e^{\alpha t}\{D\cos\beta t + E\sin\beta t\},$$

где

$$C = \frac{(p-Q)\rho}{I\theta'} \frac{\alpha^2 + \beta^2}{(\theta' - \alpha)^2 + \beta^2},$$

$$D = \frac{(p-Q)\rho}{I\theta'} \frac{\theta'^2}{\alpha^2 + \beta^2} \frac{\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha(\theta' - 2\alpha)}{(\theta' - \alpha)^2 + \beta^2},$$

$$E = \frac{(p-Q)\rho}{I\theta'} \frac{\theta'^2}{\alpha^2 + \beta^2} \frac{1}{\beta} \frac{(\beta^2 - \alpha^2)(\theta' - \alpha) - 2\alpha\beta^2}{(\theta' - \alpha)^2 + \beta^2}.$$

Если подставить эти величины C, D, E в написанные выше формулы для $\omega - \omega_0$, то мы будем иметь совершенно определенное выражение скорости ω в виде функции времени t. Исследуя эту функцию по известным правилам, найдем, что моменты времени t, для которых скорость принимает макси-

мальные или минимальные значения, определяются уравнением

$$-\frac{\alpha^2+\beta^2}{\theta'}e^{(\theta'-\alpha)t}=(\theta'-2\alpha)\cos\beta t-\frac{\beta^2+\alpha(\theta'-\alpha)}{\beta}\sin\beta t.$$

В этом уравнении можно интерпретировать βt как полярный угол некоторой полярной системы координат. Тогда его левую часть можно рассматривать как радиус-вектор логарифмической спирали, а его правую часть — как радиус-вектор окружности, проходящей через начало, диаметр которой равен

$$\sqrt{[\theta'-2\alpha]^2+\left[\frac{\beta^2+\alpha(\theta'-\alpha)}{\beta}\right]^2}$$

и центр которой может быть задан углом

$$-\operatorname{arc\,tg}\frac{\beta^2+\alpha(\theta'-\alpha)}{\beta(\theta'-2\alpha)}$$

между соответствующим радиусом-вектором и полярной осью.[4] Точки пересечения этой окружности со спиралью и определяют те моменты времени, которые соответствуют интересующим нас значениям скорости. При этом могут иметь место два случая.

1) $\theta'-\alpha<0$. В этом случае с возрастанием t радиус-вектор спирали непрерывно убывает и его предельное значение равняется нулю; радиус-вектор окружности с возрастанием t всегда заключается между двумя пределами, определяемыми ее диаметром. Отсюда следует, что обе кривые пересекаются в бесконечно-большом числе точек и что при этом угловое расстояние двух последовательных точек пересечения неограниченно приближается к π. Следовательно, в этом случае скорость принимает бесконечное число раз максимальные и минимальные значения, сходящиеся к ранее найденному предельному значению.

2) $\theta' - \alpha > 0$. В этом случае с возрастанием t радиус-вектор спирали непрерывно растет. Отсюда следует, что число точек пересечения спирали и окружности не может быть бесконечным. Однако может также случиться, что спираль и окружность совсем не пересекутся. В этом последнем случае скорость не совершает колебаний, но изменяется все время в одном и том же направлении, приближаясь к ранее найденному предельному значению.[5] Если же спираль и окружность пересекаются, то в этом случае скорость, совершив конечное число колебаний, также начинает изменяться в одном направлении, неограниченно приближаясь к своему предельному значению. Легко установить, что бесконечное число колебаний скорости может иметь место в случае, когда определяющие регулятор величины x и y удовлетворяют условию[6]

$$2x^3 - 9xy + 27 > 0,$$

и что скорость допускает лишь конечное число колебаний, когда

$$2x^3 - 9xy + 27 < 0.$$

В этом последнем случае колебания фактически имеют место, если

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{\beta}{\alpha} > \frac{\beta}{\theta' - \alpha} \ln \left\{ - \frac{\theta'}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \right\}.$$

Если же

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{\beta}{\alpha} < \frac{\beta}{\theta' - \alpha} \ln \left\{ - \frac{\theta'}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \right\},$$

то в этом случае скорость приближается к своему предельному значению без колебаний.

Если начертить на нашей диаграмме кривую[7]

$$2x^3 - 9xy + 27 = 0,$$

то она пройдет через точку $E\,(x = 3,\ y = 3)$ и будет иметь ось ординат своей асимптотой. Та часть этой кривой, кото-

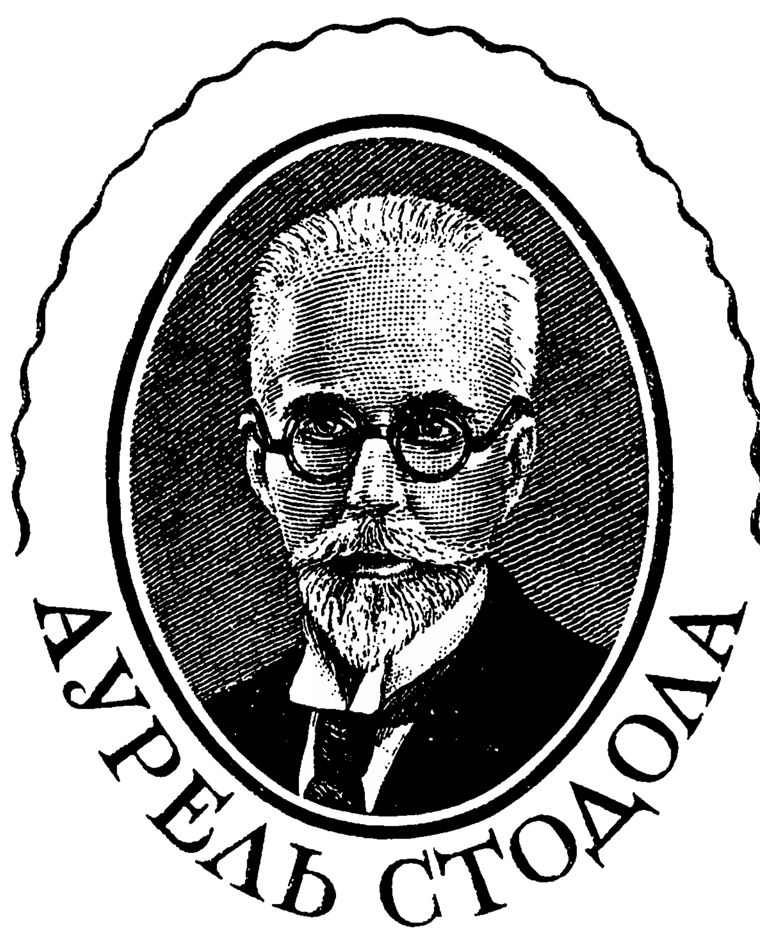
рая лежит слева от прямой $x = 3$, является границей между теми регуляторами, которые допускают бесконечное число колебаний, и такими, при употреблении которых число колебаний конечно.

Таким образом, пространство, ограниченное ветвью DE кривой DEF и только что упомянутой частью кривой $2x^2 - 9xy + 27 = 0$, соответствует регуляторам, которые принадлежат к последнему из выше названных классов. Что же касается пространства, ограниченного той же частью кривой $2x^2 - 9xy + 27 = 0$, ветвью EF и гиперболой GHK, то оно содержит точки, соответствующие регуляторам с бесконечно большим числом колебаний.

Так как минимальное значение ординаты интересующей нас ветви кривой

$$2x^3 - 9xy + 27 = 0$$

равняется 2.38, то, вообще говоря, все регуляторы, совершающие конечное число колебаний, принадлежат к классу существенно статических, т. е. к таким регуляторам, которые, по предыдущему, не обеспечивают высокую равномерность хода машины. Таким образом, если требуется поддерживать весьма высокую равномерность движения, то следует выбирать такие регуляторы, которые, после нарушения равновесия, совершают бесконечное число колебаний.


АУРЕЛЬ СТОДОЛА

АУРЕЛЬ СТОДОЛА



О РЕГУЛИРОВАНИИ ТУРБИН



Проф. А. СТОДОЛА

О РЕГУЛИРОВАНИИ ТУРБИН. I.

Ueber die Regulierung von Turbinen. I. Von Aurel Stodola, Professor am Eidgenössischen Polytechnikum in Zürich. Schweizerische Bauzeitung. Bd. XXII, 1893 N 17, Стр. 113—117; N. 18, Стр. 121—122; N 19, Стр. 126—128; N 20, Стр. 134—135

Проф. А. СТОДОЛА

О РЕГУЛИРОВАНИИ ТУРБИН. II.

Ueber die Regulierung von Turbinen. II. Von Aurel Stodola, Professor am Eidgenössischen Polytechnikum in Zürich. Schweizerische Bauzeitung. Bd. XXIII, 1894 N 17, Стр. 108—112; N 18, Стр. 115—117



О РЕГУЛИРОВАНИИ ТУРБИН. I.



Проблема регулирования являлась предметом многочисленных исследований, однако главным образом с точки зрения ее применения к паровым машинам или к определению динамических свойств самих регуляторов. В основных работах Каргля (Civilingenieur, 1871—1873), Вышнеградского (Civilingenieur, 1877), Грасгофа (Teoretische Maschinenlehre, 1881) и др. исчерпывающим образом исследовано так называемое вредное действие массы регулятора и в этот трудный вопрос внесена полная ясность.

На сегодня проблему конструирования регуляторов можно считать разрешенной, тем более, что с тех пор и практика создала ряд типов регуляторов, которые могут считаться почти совершенными, т. е. почти свободными от действия массы. Известно, что для достижения этой цели необходимо по возможности увеличивать „энергию“ регулятора и одновременно по возможности уменьшать массу последнего. Выгодно также, вообще говоря, применять масляный катаракт. Большинство современных быстроходных пружинных регуляторов отвечает упомянутым выше требованиям; поэтому для упрощения нижеследующих исследований мы будем рассматривать идеальный регулятор с бесконечно большой „энергией“,

который, следовательно, моментально реагирует на каждое изменение скорости двигателя, т. е. моментально принимает то положение, которое отвечает — при установившемся режиме — его равновесию. [1*]

В отношении регулирования турбин, наряду с требованием возможно большего совершенства самих регуляторов, необходимо учесть следующие два существенных обстоятельства: 1) в общем случае для перестановки органа управления или запорного органа требуется значительная сила; 2) при всяком изменении расхода масса жидкости, движущейся в подводящей трубе, испытывает реакцию, проявляющуюся в колебаниях давления. Первое обстоятельство привело к использованию непрямого регулирования при помощи „сервомотора“ Фарко [2] или механического реле. Эти устройства, посредством механизмов,[3] включающих постороннее воздействие, позволяют в любой степени увеличивать „энергию“ регулятора и, следовательно, преодолевать произвольно большое сопротивление. Пытаясь учесть второе обстоятельство, особо существенное для турбин высокого давления, стали устанавливать массивные маховики, устраивать воздушные колпаки в трубопроводах, применять трубопроводы большого диаметра и т. д. Однако до сих пор отсутствуют какие либо данные, позволяющие судить о том, возможно ли и при каких условиях достигнуть поставленной цели, т. е. возможно ли при помощи указанных средств избежать колебаний давления. Задачей настоящего исследования является установление критерия, позволяющего дать ответ на этот вопрос.

Предположим, что имеется активная турбина, в которой регулирование осуществляется путем изменения поперечного сечения направляющего сопла, так что вытекающая масса воды может быть принята просто пропорциональной этому поперечному сечению. Такое предположение осуществляется почти идеально в турбинах с одним единственным направляющим соплом, которое регулируется „иглой“, и достаточно

точно при регулировании заслонками, даже в случае многих направляющих каналов.

Обстоятельства складываются различно, смотря по тому, моментально или с запаздыванием следует в своем движении запирающий орган за регулятором. Первый случай весьма точно осуществляется в гидравлическом сервомоторе; размеры этого прибора можно выбрать такими, что для поршня потребуются доли секунды, чтобы занять любое положение, предписываемое регулятором.

Во всех механических сервомоторах, связываемых при помощи передаточного механизма с турбинным валом, наблюдается второй случай, так как здесь даже мгновенное включение движения не приводит к скоростям, превышающим известные границы.

Таким образом сервомоторы действуют мгновенно или с запаздыванием, и в соответствии с этими характерными особенностями настоящее исследование делится на две части. [4]

1. РЕГУЛИРОВАНИЕ ПРИ ПОМОЩИ МГНОВЕННО ДЕЙСТВУЮЩЕГО СЕРВОМОТОРА

В этом случае комбинация из регулятора и сервомотора может быть при теоретическом рассмотрении заменена идеальным статическим регулятором с бесконечно большой „энергией“, действующим прямо на запирающий орган. [5]

Каждому значению мощности турбины отвечает при установившемся режиме определенное потребление воды в единицу времени и, следовательно, определенное сечение направляющего сопла, определенное положение муфты регулятора и определенная скорость в питающей трубе. Если, например, из-за внезапной разгрузки турбины, последняя будет двигаться ускоренно, так что регулятор сузит направляющее сопло, то в качестве первого результата мы будем иметь в устье напорного трубопровода повышение давления, обусловленное тем, что масса воды в трубопроводе не может мгно-

венно изменить свою скорость на меньшую, соответствующую новому состоянию равновесия, и будет затормаживаться перед отверстием до тех пор, пока не поглотится излишек ее живой силы. Это повышение давления, в свою очередь, вызовет рост скорости истечения из направляющего сопла. При этом увеличится работа, отдаваемая водой, так как через то же поперечное сечение должно будет в единицу времени вытекать с большей скоростью большее количество воды. Если перед этим установилось сечение направляющего сопла, как раз соответствующее будущему установившемуся режиму, то теперь даже совершенный регулятор должен будет перерегулировать, т. е. должен будет еще уменьшить поперечное сечение сопла и действовать в этом направлении до тех пор, пока снижение расхода воды не скомпенсирует излишек ее живой силы. Начиная с этого момента регулятор будет двигаться вниз и производить изменения противоположного рода, т. е. будет иметь место увеличение поперечного сечения направляющего сопла, падение давления в трубопроводе, вторичное перерегулирование и связанное с ним новое увеличение скорости жидкости в трубопроводе и т. д. Очевидно, что такая игра может повторяться много раз, так что переход к новому установившемуся режиму не будет равномерным, а, вообще говоря, будет сопровождаться колебаниями давления и скорости. Таким образом, все дело сведется к тому, будут ли действия следующих друг за другом импульсов взаимно усиливаться или взаимно подавляться. В настоящем исследовании будет показано, что *при определенных условиях возникающие при регулировании колебания давления и скорости увеличиваются по амплитуде,* так что, с одной стороны, регулирование становится иллюзорным, а с другой стороны, появляется опасность для прочности трубопровода.

Проблема, на которую должно быть обращено особое внимание в дальнейшем рассмотрении, может быть сформулирована следующим образом.

Заданы начальные значения скорости, сечения направляющего сопла, давления, нагрузки, а также и другие проектные данные активной турбины, работающей в установившемся режиме. В некоторый момент времени $t=0$ нагрузка сразу изменяется на определенную бóльшую или меньшую величину, но в дальнейшем остается постоянной. Спрашивается, как будут изменяться (теперь только под влиянием регулятора) давление и скорость — вплоть до наступления нового установившегося режима?

Строгий математический разбор этой задачи связан с непреодолимыми трудностями; однако он будет относительно прост, если предположить, что изменения всех рассматриваемых переменных очень малы, так что их высшими степенями можно пренебречь. Результат должен рассматриваться как первое, однако достаточно хорошее, приближение, особенно для изменений скорости, ибо задача хорошего регулирования как раз в том и состоит, чтобы эти изменения скорости были заключены в узких границах. [6]

Составление основных уравнений

Обозначим для дальнейшего:

M — приведенная к среднему радиусу R_0 масса рабочего колеса турбины и всех связанных с ним устройств (шестерен трансмиссий и т. д.);

v — окружная скорость рабочего колеса турбины, приведенная к радиусу R_0;

P — мгновенное значение движущей силы, приведенной к радиусу R_0;

Q — постоянная величина сопротивления, приведенная к радиусу R_0;

H — высота напора от отверстия направляющего сопла до верхнего зеркала воды;

L — общая длина напорного трубопровода;
d_0 — диаметр напорного трубопровода;
F — сечение напорного трубопровода;
c — скорость в напорном трубопроводе;
l — длина нагнетательного воздушного колпака (его воздушного объема), приведенная к поперечному сечению напорного трубопровода, так что $F \cdot l$ равняется объему воздушного колпака;
p — избыточное давление воды по отношению к атмосферному давлению, измеренное непосредственно перед направляющим аппаратом;
γ — удельный вес воды;
g — ускорение силы тяжести;
$u = \sqrt{\frac{2g}{1+\zeta_0} \frac{p}{\gamma}}$ — скорость вытекания из направляющего аппарата (ζ_0 — коэффициент сопротивления);
f — выходное сечение направляющего сопла;
s — смещение муфты регулятора относительно произвольного начального положения;
$v_0, P_0, c_0, l_0, p_0, u_0, f_0, s_0$ — начальные значения указанных величин для $t = 0$;
$x = \frac{v - v_0}{v}$ — так называемое „относительное" изменение начальной окружной скорости (короче называемое также „процентным" изменением; изменение в процентах от первоначальной величины равно $100x$);
$y = \frac{c - c_0}{c_0}$ — процентное изменение c_0;
$z = \frac{p - p_0}{p_0}$ — процентное изменение p_0;

v_1, v_2 — окружные скорости, соответствующие нижнему и верхнему крайним положениям муфты регулятора;

$\delta = \frac{v_2 - v_1}{v_0}$ — степень неравномерности регулятора;

$h_0 = \frac{p_0}{\gamma}$ — пьезометрическая высота, определяемая непосредственно у направляющего аппарата;

$\zeta_r \frac{L}{d_0} \frac{c_0^2}{2g}$ — потеря напора из-за сопротивлений в трубопроводе (включая влияние закруглений и пр.).

Единицы: метры и килограммы.

Каждому значению окружной скорости v соответствует определенное положение равновесия регулятора, т. е. s является функцией v. Запирающие органы связаны с регулятором специальным механизмом и должны следовать за движением последнего; поэтому f является функцией от s. Подставив в последнюю s как функцию v, получим $f = f(v)$. Для бесконечно-малых изменений можно положить:

$$f = f_0 + (v - v_0)\left(\frac{df}{dv}\right)_{v = v_0}.$$

Введем обозначение

$$\alpha_0 = -\frac{v_0}{f_0}\left(\frac{df}{dv}\right)_{v = v_0}. \tag{1}$$

Тогда получим:

$$f = f_0\left(1 - \alpha_0 \frac{v - v_0}{v_0}\right) = f_0(1 - \alpha_0 x). \tag{1a}$$

Примем для простоты, что зависимость между f и v линейная, т. е. $f = f_1 \frac{v_2 - v}{v_2 - v_1}$, так что для $v = v_2$ (верхнее положение муфты регулятора) $f = 0$, т. е. выходное направляющее

сопло закрыто, а для $v = v_1$ (нижнее положение муфты регулятора) $f = f_1$, где f_1 — сечение полностью открытого сопла. Следовательно,

$$\frac{df}{dv} = -\frac{f}{v_2 - v_1}, \text{ откуда } f_0 \alpha_0 = f_1 \frac{v_0}{v_2 - v_1} = \frac{f_1}{\delta}. \qquad (16)$$

Отношение $\alpha_0 f_0 : f_1$ является мерой астатичности регулятора.

Таким образом $f_0 \alpha_0 : f_1$ тем больше, чем меньше неравномерность (т. е. чем больше астатичность регулятора); α_0 само сильно меняется с изменением отношения $\frac{f_1}{f_0}$. В качестве среднего значения возьмем $\frac{f_1}{f_0} = 2$; $\delta = \frac{1}{25}$; отсюда $\alpha_0 = 50$.

Так как мы рассматриваем активную турбину, [7] то скорость вытекания u при малых разностях $p - p_0$ может быть представлена в виде: [8]

$$u = \sqrt{\frac{2g}{1+\zeta}\frac{p}{\gamma}} = \sqrt{\frac{2g}{1+\zeta}\left(1 + \frac{p - p_0}{p_0}\right)\frac{p_0}{\gamma}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2g}{1+\zeta}\frac{p_0}{\gamma}}\left\{1 + \frac{1}{2}\frac{p - p_0}{p_0}\right\}$$

или

$$u = u_0\left(1 + \frac{1}{2}z\right).$$

Здесь предположено, что скорость в трубопроводе пренебрежимо мала по сравнению с u, что чаще всего и бывает. Окружную силу P мы определим как частное из мощности и окружной скорости; отсюда получаем, если η — гидравлический к. п. д.: [9]

$$P = \left(fu\frac{\gamma}{g}\right)\frac{u^2}{2}\eta\frac{1}{v}.$$

Поведение к. п. д. для постоянного u может быть представлено кривой параболического вида, вершина которой соответствует нормальному режиму работы машины; для $v = \text{const}$ и переменного u кривая будет более сложной, причем в точке,

соответствующей нормальному режиму работы, также будет максимум. Так как u и v меняются очень мало, то мы можем η рассматривать как постоянное. Образуем из P логарифмический дифференциал и заменим dP через $P-P_0$ и т. д., тогда получим:[10]

$$\frac{P-P_0}{P_0} = -\frac{v-v_0}{v_0} + \frac{f-f_0}{f_0} + 3\frac{u-u_0}{u_0}$$

или, выражая через x, y, z:

$$\frac{P-P_0}{P_0} = -(\alpha_0+1)x + \frac{3}{2}z \, .$$

Уравнение движения рабочего колеса турбины будет иметь вид:

$$M\frac{dv}{dt} = P - Q = (P_0 - Q) + (P - P_0)$$

или

$$\frac{Mv_0}{P_0}\frac{dx}{dt} = \frac{P_0 - Q}{P_0} - (\alpha_0+1)x + \frac{3}{2}z. \qquad (2)$$

Дифференциальное уравнение движения напорной жидкости получается путем применения теоремы живых сил. За элемент времени dt сверху вступает в трубопровод элементарный объем жидкости $Fcdt$, который ускоряется от скорости c' у верхнего бассейна до скорости c. Мы примем сопротивления настолько незначительными, что c' от c и c_0' от c_0 отличаются настолько мало, что соответствующей разностью живых сил можно пренебречь. Пусть масса воды в напорном трубопроводе ускоряется от скорости c до скорости $c+dc$. Тогда кинетическая энергия этой массы возрастает на величину $FL\frac{\gamma}{g}c\,dc$ (g — ускорение силы тяжести), и это приращение равняется алгебраической сумме всех отданных этой массе работ. Такими работами будут: 1) работа силы тяжести, равная произведению общего веса на элементарный путь центра тяжести или, что то же самое, произведению веса элементарного объема $Fc\gamma dt$ на всю высоту падения, т. е. на напор H или $Fc\gamma Hdt$; 2) работа давления

воды в нижнем сечении трубопровода (за вычетом аналогичной работы в его верхнем сечении), равная $Fpcdt$; 3) работа трения, равная

$$-\int_0^L (Fc\gamma dt)\,\zeta_r \frac{dL}{d_0}\frac{c^2}{2g} = -(Fc\gamma dt)\zeta_r \frac{L}{d_0}\frac{c^2}{2g}.$$

Таким образом мы получаем:

$$\frac{L\gamma}{g}\frac{dc}{dt} = H\gamma - p - \zeta_r \frac{L}{d_0}\frac{c^2}{2g}\gamma.$$

Подставим сюда значения $c = c_0(1+y)$, $p = p_0(1+z)$, $\frac{dc}{dt} = c_0 \frac{dy}{dt}$ и пренебрежем всеми членами с высшими степенями y и z. Учтя затем, что для $t=0$ производная $\frac{dc}{dt} = 0$, т. е.

$$0 = H\gamma - p_0 - \zeta_2 \frac{L}{d_0}\frac{c_0^2}{2g}\gamma,$$

разделив на p_0 и введя $h_0 = \frac{p_0}{\gamma}$,

окончательно найдем:

$$\left(\frac{L}{h_0}\frac{c_0}{g}\right)\frac{dy}{dt} = -\left(\frac{\zeta_r}{g}\frac{L}{h_0}\frac{c_0^2}{d_0}\right)y - z. \qquad (3)$$

Третье соотношение получим из рассмотрения изменений давления в воздушном колпаке. Для воздуха в этом колпаке не имеет смысла учитывать возможные отклонения от изотермического изменения состояния. Таким образом, если обозначить через p_a атмосферное давление, получим:

$$(p_0 + p_a)\,l_0 = (p + p_a)\,l =$$
$$= (p_0 + p_a)\left(1 + \frac{p - p_0}{p_0 + p_a}\right)l_0\left(1 + \frac{l - l_0}{l_0}\right).$$

При малых разностях $p - p_0$ и $l - l_0$, отсюда следует:

$$\frac{p - p_0}{p + p_a} = -\frac{l - l_0}{l_0}.$$

За время dt в воздушный колпак втекает объем $Fcdt$ и вытекает из него объем $fudt$; разница дает сжатие содержимого в колпаке:

$$-Fdl = Fcdt - fudt.$$

Подставим сюда $\frac{dl}{dt} = -\frac{l_0}{p_0+p_a}\frac{dp}{dt} = -\frac{l_0 p_0}{p_0+p_a}\frac{dz}{dt}$; учтем, что $Fc_0 = f_0 u_0$; $fu = f_0(1-\alpha_0 x)u_0\left(1+\frac{z}{2}\right) \approx$

$$\approx f_0 u_0\left(1-\alpha_0 x+\frac{z}{2}\right)$$

и $c = c_0(1+y)$. Тогда получим:

$$\frac{l_0}{c_0}\frac{p_0}{p_0+p_a}\frac{dz}{dt} = \alpha_0 x + y - \frac{z}{2}. \qquad (4)$$

Для более короткой записи введем еще следующие обозначения: [11]

$$T_1 = \frac{Mv_0}{P_0}, \quad T_2 = \frac{L}{h_0}\frac{c_0}{g}, \quad T_3 = \frac{l_0}{c_0}\frac{p_0}{p_0+p_a}, \quad \frac{P_0-Q}{P_0} = \Pi,$$

$$\frac{\zeta_r}{g}\frac{L}{h_0}\frac{c_0^2}{d_0} = \varepsilon. \qquad (5)$$

Здесь ε и Π — безразмерные величины; T_1, T_2, T_3 имеют размерность времени; их механический смысл ясен из написанных выше выражений, а именно:

T_1 — время, необходимое для того, чтобы масса M под действием постоянной силы P_0 изменила свою скорость от 0 до v_0; T_1 — величина, характеризующая момент инерции всех вращающихся частей;

T_2 — величина, характеризующая длину трубопровода;

T_3 — величина, характеризующая размеры воздушного колпака;

ε — величина, характеризующая потерю напора из-за сопротивлений;

Π — величина, характеризующая относительное (процентное) изменение нагрузки.

Основные уравнения (2), (3), (4) запишутся теперь в виде:[12]

$$\left.\begin{aligned} &T_1\frac{dx}{dt}+(\alpha_0+1)x-\frac{3}{2}z=\Pi,\\ &T_2\frac{dy}{dt}+\varepsilon y+z=0,\\ &T_3\frac{dz}{dt}-\alpha_0 x-y+\frac{1}{2}z=0. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Для исключения постоянного члена П положим $x=\xi+\xi_1$, $y=\eta+\eta_1$, $z=\zeta+\zeta_1$, где ξ_1, η_1, ζ_1 — постоянные. Тогда

$$\left.\begin{aligned} &T_1\frac{d\xi}{dt}+(\alpha_0+1)\xi-\frac{3}{2}\zeta=0,\\ &T_2\frac{d\eta}{dt}+\varepsilon\eta+\zeta=0,\\ &T_3\frac{d\zeta}{dt}-\alpha_0\xi-\eta+\frac{1}{2}\zeta=0, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

причем постоянные ξ_1, η_1, ζ_1 определяются из уравнений:

$$\left.\begin{aligned} (\alpha_0+1)\xi_1-\frac{3}{2}\zeta_1&=\Pi,\\ \varepsilon\eta_1+\zeta_1&=0,\\ -\alpha_0\xi_1-\eta_1+\frac{1}{2}\zeta_1&=0. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Известно, что решения уравнений (7) для ξ, η и ζ имеют вид сумм экспоненциальных функций с постоянными коэффициентами.

Положим: $\xi=ae^{\varphi t}$, $\eta=be^{\varphi t}$, $\zeta=ce^{\varphi t}$, и подставим эти выражения в систему (7). Сокращая на $e^{\varphi t}$, получим:

$$\left.\begin{aligned} &(T_1\varphi+\alpha_0+1)a-\frac{3}{2}c=0,\\ &(T_2\varphi+\varepsilon)b+c=0,\\ &-\alpha_0 a-b+\left(T_3\varphi+\frac{1}{2}\right)c=0. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Для совместности этих уравнений необходимо, чтобы опре-

делитель из их коэффициентов равнялся нулю, т. е. φ должно определяться из следующего так называемого „характеристического“ уравнения: [13]

$$T_1T_2T_3\varphi^3+[(\alpha_0+1)T_2T_3+\varepsilon T_1T_3+\frac{1}{2}T_1T_2]\varphi^2+$$
$$+\left[\left(\frac{\varepsilon}{2}+1\right)T_1-\left(\alpha_0-\frac{1}{2}\right)T_2+(\alpha_0+1)\varepsilon T_3\right]\varphi+$$
$$+(1-\varepsilon)\left(\alpha_0-\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{2}=0. \tag{10}$$

Это уравнение определяет три значения φ_1, φ_2 и φ_3, которые, будучи последовательно подставляемы в (9), дадут три уравнения для определения a, b и c и, следовательно, должны дать три системы значений этих коэффициентов. Однако, так как правые части уравнений (9) суть нули, определены будут лишь отношения $a:b:c$, и для полного их определения нужно использовать начальные условия. Для вычисления указанных отношений обозначим через a_k, b_k, c_k систему значений, соответствующую корню φ_k. Если, например, выберем для вычислений второе и третье из уравнений (9), то получим:

$$a_k:b_k:c_k=\left[(T_2\varphi_k+\varepsilon)\left(T_3\varphi_k+\frac{1}{2}\right)+1\right]:-\alpha_0:\alpha_0(T_2\varphi_k+\varepsilon).$$

Если теперь обозначить через λ, μ', ν' три произвольных постоянных, то общее решение (7), а следовательно, и (6), запишется в форме:

$$\left.\begin{aligned} x&=\xi_1+\lambda a_1e^{\varphi_1t}+\mu'a_2e^{\varphi_2t}+\nu'a_3e^{\varphi_3t},\\ y&=\eta_1+\lambda b_1e^{\varphi_1t}+\mu'b_2e^{\varphi_2t}+\nu'b_3e^{\varphi_3t},\\ z&=\zeta_1+\lambda c_1e^{\varphi_1t}+\mu'c_2e^{\varphi_2t}+\nu'c_3e^{\varphi_3t}.\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

В качестве $a_1, a_2\ldots$ выберем для простоты значения:

$$\left.\begin{aligned} a_k&=(T_2\varphi_k+\varepsilon)\left(T_3\varphi_k+\frac{1}{2}\right)+1,\\ b_k&=-\alpha_0,\\ c_k&=\alpha_0(T_2\varphi_k+\varepsilon)\end{aligned}\right\}k=1,2,3. \tag{12}$$

Как будет показано ниже, характеристическое уравнение (10) имеет обычно один действительный (φ_1) и два комплексных (φ_2, φ_3) корня. Последние, как известно, имеют форму:

$$\left.\begin{matrix}\varphi_2\\ \varphi_3\end{matrix}\right\} = r \pm si,$$

где $i = \sqrt{-1}$. В этом случае, для того чтобы представить решение в действительной форме, надо выбрать μ' и ν' комплексно сопряженными величинами. Тогда a_2, a_3 и c_2, c_3 будут также комплексно сопряженными и притом

$$\left.\begin{matrix}a_2\\ a_3\end{matrix}\right\} = \alpha_2 \pm \alpha_3 i, \qquad \left.\begin{matrix}c_2\\ c_3\end{matrix}\right\} = \gamma_2 \pm \gamma_3 i,$$

где

$$\left.\begin{aligned}&\alpha_2 = T_2 T_3 (r^2 - s^2) + \left(\frac{T_2}{2} + T_3 \varepsilon\right) r + \left(\frac{\varepsilon}{2} + 1\right),\\ &\gamma_2 = \alpha_0 (T_2 r + \varepsilon),\\ &\alpha_3 = \left(\frac{T_2}{2} + T_3 \varepsilon + 2 T_2 T_3 r\right) s; \quad \gamma_3 = \alpha_0 T_2 s,\end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

в то время как a_1, b_1, b_2, b_3, c_1 остаются действительными и вычисляются из соотношений (12). Полагая в заключение $\mu' = \mu + \nu i$, $\nu' = \mu - \nu i$ и используя соотношение

$$e^{(r \pm is)t} = e^{rt} [\cos (st) \pm i \sin (st)],$$

получим:

$$\left.\begin{aligned}&x = \xi_1 + \lambda a_1 e^{\varphi_1 t} + 2 [(\mu \alpha_2 - \nu \alpha_3) \cos (st) -\\ &\quad - (\mu \alpha_3 + \nu \alpha_2) \sin (st)] e^{rt},\\ &y = \eta_1 + \lambda b_1 e^{\varphi_1 t} + 2 \alpha_0 [-\mu \cos (st) + \nu \sin (st)] e^{rt},\\ &z = \zeta_1 + \lambda c_1 e^{\varphi_1 t} + 2 [(\mu \gamma_2 - \nu \gamma_3) \cos (st) -\\ &\quad - (\mu \gamma_3 + \nu \gamma_2) \sin (st)] e^{rt}.\end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Если два или три корня φ окажутся равными друг другу, то решение будет иметь другую форму, однако этот, совершенно частный, случай здесь рассматриваться не будет. [14]

Произвольные постоянные λ, μ', ν' или λ, μ, ν, входящие в состав выражений (11) и (14), определяются, как уже было указано, из начальных условий.

Пусть при $t=0$, $x=y=z=0$, тогда, например для случая комплексных корней, получим систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &\xi_1+a_1\lambda+2\alpha_2\mu-2\alpha_3\nu=0,\\ &\eta_1+b_1\lambda-2\alpha_0\mu=0,\\ &\zeta_1+c_1\lambda+2\gamma_2\mu-2\gamma_3\nu=0. \end{aligned}\right\} \qquad (14а)$$

Из этих уравнений определяются λ, μ и ν.

Дискуссия результатов

Форма решений уравнений (11) и (14) показывает, что регулирование будет совершенно различным в зависимости от вида корней характеристического уравнения. В случае комплексных корней все выражения содержат периодические функции и переход к новому положению равновесия происходит с колебаниями; в случае действительных корней колебания не возникают, а значения x, y, z (при условии, что все корни отрицательные) приближаются к определенным пределам, если же один из корней положительный, то эти значения беспредельно возрастают. Поэтому для правильного регулирования необходимо выполнение следующих условий.

1. Ни один из действительных корней не может быть положительным, ибо в противном случае соответствующий экспоненциальный множитель $e^{\varphi t}$ будет стремиться к бесконечности. Так как полученные формулы для больших значений x, y, z, вообще говоря, несправедливы, то отсюда можно лишь заключить, что в этом случае муфта регулятора будет подниматься до своего крайнего положения, так что закроет полностью запорный клапан, затем снова его совсем откроет и будет продолжать двигаться подобным образом в пределах, ограниченных упорами; при этом давление и скорость могут сильно изменяться. [15]

2. В случае комплексных корней их действительная часть также должна быть отрицательной, иначе x, y, z будут, колеблясь, неограниченно расти.

Последний член характеристического уравнения $(1-\varepsilon)\left(\alpha_0-\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{2}$ почти всегда положителен, так как ε очень мало. Поэтому всегда будет один отрицательный действительный корень. Когда все корни действительны (и только тогда), для того чтобы выполнялось первое условие, остальные коэффициенты также должны быть положительными. Это будет иметь место, если

$$\left(\frac{\varepsilon}{2}+1\right)T_1-\left(\alpha_0-\frac{1}{2}\right)T_2+(\alpha_0+1)\,\varepsilon T_3>0. \qquad (15)$$

Для того чтобы сформулировать математически второе условие, мы используем прием, примененный ранее Вышнеградским (Civilingenieur, 1877, стр. 110). С этой целью перепишем характеристическое уравнение в форме

$$a\varphi^3+b\varphi^2+c\varphi+d=0,$$

где

$$\left.\begin{aligned} a&=T_1T_2T_3,\\ b&=\left[(\alpha_0+1)T_2T_3+\varepsilon T_3T_1+\frac{1}{2}T_1T_2\right],\\ c&=\left[\left(\frac{\varepsilon}{2}+1\right)T_1-\left(\alpha_0-\frac{1}{2}\right)T_2+(\alpha_0+1)\,\varepsilon T_3\right],\\ d&=(1-\varepsilon)\left(\alpha_0-\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{2}. \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Разделив на a и подставив $\varphi=\psi-\frac{b}{3a}$, получим:

$$\psi^3+p\psi+q=0,$$

где

$$p=\left(\frac{c}{a}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{b}{a}\right)^2; \quad q=\frac{2}{27}\left(\frac{b}{a}\right)^3-\frac{1}{3}\left(\frac{b}{a}\right)\left(\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{d}{a}\right).$$

Обозначив далее через Δ выражение $\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}$ и положив

$$U=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}}\,; \qquad V=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\Delta}}\,,$$

получим выражения для корней в явной форме:

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_1&=\psi_1-\frac{b}{3a}=U+V-\frac{b}{3a},\\
\varphi_2&=\psi_2-\frac{b}{3a}=-\frac{1}{2}(U+V)-\frac{b}{3a}+\\
&\quad+i\sqrt{3}\,\frac{1}{2}(U-V)=r+si,\\
\varphi_3&=\psi_3-\frac{b}{3a}=-\frac{1}{2}(U+V)-\frac{b}{3a}-\\
&\quad-i\sqrt{3}\,\frac{1}{2}(U-V)=r-si.
\end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

Если $\Delta<0$, то φ_2 и φ_3 мнимы; сравнивая φ_2 с φ_1, получим $\varphi_1=-2r-\frac{b}{a}$. Подставив это значение в характеристическое уравнение, придем к уравнению:

$$8ar^3+8br^2+2\left[\left(\frac{b}{a}\right)^2+c\right]r+\left[\frac{bc}{a}-d\right]=0.$$

r — единственный действительный корень этого уравнения. Его знак, согласно правилу алгебры, противоположен знаку последнего члена; таким образом r, т. е. действительная часть комплексного корня характеристического уравнения, будет отрицательна, если $\frac{bc}{a}-d>0$. Подставляя сюда значения a, b, c и d, получим неравенство:[16]

$$\left[(\alpha_0+1)\,T_2T_3+\varepsilon T_3T_1+\frac{1}{2}\,T_1T_2\right]\left[\left(\frac{\varepsilon}{2}+1\right)T_1-\right.$$

$$-\left(\alpha_0-\frac{1}{2}\right)T_2+(\alpha_0+1)\varepsilon T_3\Bigg]-\left[(1-\varepsilon)\left(\alpha_0-\frac{1}{2}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{3}{2}\right]T_1T_2T_3>0. \qquad (18)$$

Наиболее благоприятный случай для регулирования (три отрицательных действительных корня) требует выполнения наряду с условием (15) также и условия $\Delta<0$ или, если последнее условие выразить через a, b, c, d, условия

$$\frac{b^3d}{a^4}-\frac{1}{4}\frac{b^2c^2}{a^4}+\frac{27}{4}\frac{d^2}{a^2}-\frac{9}{2}\frac{bcd}{a^3}+\frac{c^3}{a^3}<0. \qquad (19)$$

Вышнеградский в указанной выше работе доказал, что если неравенство (19) удовлетворено, то тем самым удовлетворено и условие (18) или, иначе, что (18) является общим условием, выполнения которого следует требовать во всех случаях. Если считать приемлемыми комплексные корни, то можно ограничиться одним условием (18). При этом нужно иметь в виду, что из числовых примеров можно убедиться, что условие (19)[17] является трудно выполнимым, так как для этого необходимы или очень большие маховики, или очень длинные трубопроводы и воздушные колпаки.

Соотношения (18), (15) и (19) позволяют быстро определить способность к регулированию заданной турбины или соответственно рассчитать проектируемую турбину. Прежде чем переходить к детальному рассмотрению, сделаем несколько общих выводов, непосредственно вытекающих из предыдущего. Из формы полученных соотношений следует, что исходные параметры, характеризующие турбинную установку, фигурируют в них не самостоятельно, а лишь в комбинациях T_1, T_2, T_3, ε, α_0. Различные турбинные установки, поскольку им соответствуют одинаковые значения этих величин, в отношении регулирования будут вести себя одинаковым образом.

Рассмотрим, например, выражение $T_1=\dfrac{M v_0}{P_0}$ и запишем

его в форме

$$T_1 = 2\left(\frac{M v_0^2}{2}\right)\left(\frac{1}{P_0 v_0}\right).$$

Тогда можно сформулировать следующее правило:

в вопросах регулирования турбины определяющей величиной является не приведенная масса ее вращающихся частей, а живая сила этих частей, отнесенная к единице отдаваемой турбиной мощности.

Далее $T_2 = \left(\frac{L}{h_0}\right)\frac{c_0}{g}$ и $\varepsilon = \frac{\zeta_r}{g}\left(\frac{L}{h_0}\right)\frac{c_0^2}{d_0}$; только сюда входит длина трубопровода в виде отношения $\frac{L}{h_0}$, которое приближенно равно $\frac{L}{H}$. Отсюда следует:

две турбины, для которых отношение длины трубопровода к высоте напора одинаково, в отношении регулирования равноценны.

Таким образом, в отношении регулирования не существует принципиальной разницы между турбинами высокого и низкого давления. Необходимо только иметь в виду, что под „равноценностью в отношении регулирования“ здесь понимается одинаковость соответствующих процентных изменений давления, скорости и т. д. Абсолютные величины этих изменений могут, таким образом, друг от друга отличаться очень существенно.

Наконец, $T_3 = \frac{l_0}{c_0}\frac{p_0}{p_0 + p_a}$, причем только здесь встречается величина воздушного колпака l_0. Поэтому можно сказать: *объем воздушного колпака, в отношении регулирования, характеризуется своей абсолютной величиной, а не отношением этого объема к длине трубопровода. Или, иначе (если пренебречь близким к единице множителем $\frac{p_0}{p_0 + p_a}$), при одинаковых*

P_0, c_0, $\frac{L}{h_0}$ и самый короткий и самый длинный трубопровод требуют одних и тех же объемов воздушных колпаков.

Частные случаи

Для того чтобы общие результаты сделать более обозримыми, рассмотрим теперь ряд простых частных случаев.

1. **Турбина без воздушного колпака при пренебрежении трением жидкости.** Установка такого рода характеризуется значениями $T_3=0$, $\varepsilon=0$. Имеем:

$$\xi_1=\frac{\Pi}{\alpha_0+1}; \quad \eta_1=-\frac{\Pi\alpha_0}{\alpha_0+1}; \quad \zeta_1=0.$$

Характеристическое уравнение будет квадратным:

$$T_1T_2\varphi^2+[2T_1-(2\alpha_0-1)T_2]\varphi+2(\alpha_0+1)=0. \qquad (20)$$

Так как α_0 в среднем равно 50, пренебрежем единицей по сравнению с α_0 и напишем:

$$T_1T_2\varphi^2+2[T_1-\alpha_0T_2]\varphi+2\alpha_0=0.$$

Условие, что корни этого уравнения действительны и отрицательны, дает:

$$T_1-\alpha_0T_2>0 \text{ и } (T_1-\alpha_0T_2)^2-2\alpha_0T_1T_2>0$$

или

$$[T_1-(2+\sqrt{3})\alpha_0T_2][T_1-(2-\sqrt{3})\alpha_0T_2]>0.$$

Оба множителя последнего выражения должны иметь одинаковые знаки, и так как $T_1>\alpha_0T_2$, то, следовательно,

$$T_1>(2+\sqrt{3})\alpha_0T_2. \qquad (21)$$

Корни будут комплексными, с отрицательной действительной частью, если

$$(2+\sqrt{3})\alpha_0T_2>T_1>\alpha_0T_2. \qquad (22)$$

Из неравенства (22) следует:

величина приведенной вращающейся массы закрытой турбины с напорным трубопроводом без воздушного колпака ограничена минимальным значением $T_1 = \alpha_0 T_2$; *если перейти эту границу, то колебания давления и скорости будут нарастать.*

В случае комплексных корней $\varphi_1 = r + si$ и $\varphi_2 = r - si$ нужное решение будет иметь вид:

$$\left.\begin{aligned} x &= \Pi\left[\frac{1}{\alpha_0} + \frac{1}{\alpha_0}\left\{-\cos(st) + \left(\frac{T_2}{2}\frac{r^2+s^2}{s} + \frac{r}{s}\right)\sin(st)\right\}e^{rt}\right], \\ y &= \Pi\left[-1 + \left\{\cos(st) - \frac{r}{s}\sin(st)\right\}e^{rt}\right], \\ z &= \Pi T_2 \frac{r^2+s^2}{s}\sin(st)\, e^{rt}. \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

Если выберем приведенную вращающуюся массу соответствующей предельному случаю $T_1 = \alpha_0 T_2$, то получим $r = 0$, $s = \frac{\sqrt{2}}{T_2}$ и, следовательно, для колебаний давления z:

период колебания $T = \frac{2\pi}{s} = \pi\sqrt{2}\, T_2$,

амплитуда $R = \Pi\sqrt{2}$.

Отсюда следует правило:

в случае минимальной, но еще допустимой приведенной вращающейся массы, колебания происходят с постоянной амплитудой, которая может постепенно уменьшаться лишь из-за трения; величина амплитуды колебаний давления не зависит от размеров турбины и в $\sqrt{2}$ *раз больше относительного изменения нагрузки.*

2. Турбина без воздушного колпака при наличии трения. В этом случае $T_3 = 0$ и характеристическое уравнение имеет вид:

$$\left[\varepsilon T_3 T_1 + \frac{1}{2} T_1 T_2\right]\varphi^2 + \left[\left(\frac{\varepsilon}{2} + 1\right) T_1 - (\alpha_0 - 1) T_2\right]\varphi +$$

$$+\left[(1-\varepsilon)\left(\alpha_0-\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{2}\right]=0.$$

Здесь также пренебрежем единицей по сравнению с α_0. В качестве условия для затухания колебаний получим:

$$\left(\frac{\varepsilon}{2}+1\right)T_1-\alpha_0 T_2>0 \quad \text{или} \quad T_1>\frac{\alpha_0 T_2}{1+\frac{\varepsilon}{2}}. \tag{24}$$

В случае 1, согласно неравенствам (22), $T_1>\alpha_0 T_2$; ε, как правило, мало: например, для $\frac{L}{h_0}=10$, $c_0=1$, $\zeta_2=0.03$, $d=0.2$, $\varepsilon=\zeta_2\frac{L}{h_0}\frac{c_0^3}{gd_0}=0.15$. Приведенная вращающаяся масса, вычисленная в соответствии с неравенствами (24), отличается лишь на какой-нибудь процент от вычисленной по (22).

Сопротивление движению играет второстепенную роль.

3. **Турбина с воздушным колпаком и с исчезающе малой вращающейся массой.** В этом случае $T_1=0$, характеристическое уравнение снова квадратное, именно:

$$(\alpha_0+1)T_2T_3\varphi^2+\left[-\left(\alpha_0-\frac{1}{2}\right)T_2+(\alpha_0+1)\varepsilon T_3\right]\varphi+$$
$$+\left[(1-\varepsilon)\left(\alpha_0-\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{2}\right]=0.$$

Условие затухания колебаний имеет форму:

$$-\left(\alpha_0-\frac{1}{2}\right)T_2+(\alpha_0+1)\varepsilon T_3>0$$

или, пренебрегая единицей по сравнению с α_0,

$$T_3>\frac{T_2}{\varepsilon}. \tag{25}$$

При достаточном увеличении воздушного колпака приведенную вращающуюся массу можно уменьшить до произвольно малой величины.

Необходимо отметить, что по предположению воздушный колпак должен быть установлен непосредственно рядом с направляющим аппаратом, так как иначе инерция находящейся между ними массы воды будет возмущать движение.

4. Открытые турбины. Этот случай должен служить иллюстрацией к предположению $c_0 = 0$, так как в открытых турбинах эта скорость мала. Будем иметь $T_2 = 0$, $T_3 = 0$, $\varepsilon = 0$. Дифференциальные уравнения (6) примут вид:

$$T_1 \frac{dx}{dt} + (\alpha_0 + 1)\, x = \Pi; \quad z = 0; \quad y = -\alpha_0 x.$$

Отсюда

$$x = \Pi \left[1 - e^{\frac{\alpha_0}{T_1} t} \right],$$

т. е. *в открытых турбинах регулирование происходит без колебаний.*

5. Общий случай. Турбины при наличии приведенной вращающейся массы и воздушного колпака. Здесь применимы общие формулы (11) — (19). В частности, допустимые предельные значения для одной из величин T_1, T_2, T_3. ε вычисляются из условия (18), если другие величины заданы. Наибольший интерес представляет выяснение влияния размеров воздушного колпака. Используем для этой цели выражение (18), расположив отдельные члены по степеням T_3. Так как α_0 равно в среднем 50, а ε является малой дробью, то мы можем пренебречь единицей по сравнению с α_0 и ε по сравнению с единицей. Тогда получим:

$$\alpha_0 \varepsilon \left[\varepsilon T_1 + \alpha_0 T_2 \right] T_3^2 + \left[\varepsilon T_1^2 - \alpha_0^2 T_2^2 - \frac{1}{2} \alpha_0 \varepsilon T_1 T_2 \right] T_3 +$$

$$+ \frac{1}{2} \left[T_1 - \alpha_0 T_2 \right] T_1 T_2 > 0. \qquad (26)$$

Обозначим:

$$\left.\begin{aligned} A &= \alpha_0\varepsilon\,[\varepsilon T_1 + \alpha_0 T_2], \\ B &= \frac{1}{2}\left[\varepsilon T_1^2 - \alpha_0^2 T_2^2 - \frac{1}{2}\alpha_0\varepsilon T_1 T_2\right], \\ C &= \frac{1}{2}[T_1 - \alpha_0 T_2]\, T_1 T_2. \end{aligned}\right\} \quad (26а)$$

Тогда левая часть (26) примет следующий вид:

$$F(T_3) = AT_3^2 + 2BT_3 + C > 0. \quad (26б)$$

Значения, которые может принимать T_3, чтобы удовлетворить условиям (26б), зависят от корней T_3' и T_3'' уравнения $F(T_3)=0$, причем:

$$\left.\begin{aligned} T_3' &= \frac{-B-\sqrt{B^2-AC}}{A}, \\ T_3'' &= \frac{-B+\sqrt{B^2-AC}}{A}. \end{aligned}\right\} \quad (27)$$

Если корни T_3' и T_3'' действительные, то $F(T_3)>0$ для всех значений T_3*. Если корни мнимые, то $F(T_3)>0$ для любых значений T_3.

Характер корней T_3', T_3'' зависит от коэффициентов A, B, C и притом, как известно, следующим образом:

I. B^2-AC положительно; корни действительные:

1) $C<0$; T_3' отрицательно, T_3'' положительно. Так как отрицательное значение для T_3 не имеет никакого смысла, в качестве условия имеем: $T_3 > T_3''$.

2) $C<0$ и $B<0$. Оба корня положительны; T_3 должно быть больше T_3'' или меньше T_3'.

3) $C>0$ и $B>0$. Оба корня отрицательные; это будет иметь место, если $T_3>0$.

---

* Больших, чем T_3'', или меньших (алгебраически), чем T_3'.

II. $B^2 - AC$ отрицательно; корни будут мнимыми; T_3 — любое.

Для того чтобы установить критерий изменения знаков у коэффициентов, напишем:

$$B = \frac{\varepsilon}{2}\left[T_1 - \left(\frac{1}{4} + \sqrt{\frac{1}{8} + \frac{1}{\varepsilon}}\right)\alpha_1 T_2\right] \times$$
$$\times \left[T_1 + \left(-\frac{1}{4} + \sqrt{\frac{1}{8} + \frac{1}{\varepsilon}}\right)\alpha_0 T_2\right].$$

Так как второй множитель всегда положителен, знак зависит только от первого множителя. Обозначив через Φ выражение $\frac{1}{4} + \sqrt{\frac{1}{8} + \frac{1}{\varepsilon}}$, получим $B \lesseqgtr 0$, если $T_1 \lesseqgtr \Phi\alpha_0 T_2$. Из выражения для C следует, что $C \lesseqgtr 0$, если $T_1 \lesseqgtr \alpha_0 T_2$. Наконец, нетрудно установить, что $B^2 - AC \lesseqgtr 0$, если $T_1 \lesseqgtr \psi\alpha_0 T_2$, причем отношение $\frac{\psi}{\Phi}$ меняется весьма мало: оно изменяется в пределах от $\frac{1}{1.8}$ до $\frac{1}{2}$ при уменьшении ε от 0.1 до 0. Выберем поэтому для него значение $\frac{1}{2}$, т. е. примем $\psi = \frac{1}{2}\Phi$.

Тогда будем иметь следующие соотношения:

1) $0 < T_1 < \alpha_0 T_2$; корни имеют различные знаки; должно быть $T_3 > T_3''$.

2) $\alpha_0 T_2 < T_1 < \frac{1}{2}\Phi\alpha_0 T_2$; оба корня положительны, поэтому T_3 должно быть либо больше, чем T_3'', либо меньше, чем T_3'.

3) $\frac{1}{2}\Phi\alpha_0 T_2 < T_1 < \infty$; оба корня либо отрицательные, либо мнимые; T_3 может иметь любое положительное значение. Входящему сюда выражению $\alpha_0 T_2$, согласно условию (22), соответствует минимальная приведенная вращающаяся масса, которой может обладать турбина, работающая без воздушного

колпака. Назовем эту приведенную вращающуюся массу „нормальной“, тогда полученные выше результаты могут быть представлены в следующей форме.

Допустимая (или необходимая) величина воздушного колпака зависит, главным образом, от отношения приведенной вращающейся массы к относительной длине трубопровода и от сопротивления движению в трубопроводе, а именно:

1) *если приведенная вращающаяся масса меньше „нормальной“, то объем воздушного колпака не может быть ниже известного минимума;*

2) *при величине приведенной вращающейся массы, заключенной в пределах* $\alpha_0 T_2 < T_1 < \frac{1}{2}\Phi\alpha_0 T_2$, *объем воздушного колпака должен быть взят или очень большим или очень малым. Для его значений, заключенных в пределах* T'_3 *и* T''_3, *колебания давления и скорости возрастают;*

3) *лишь при достаточно большой приведенной вращающейся массе* $\left[T_1 > \frac{1}{2}\Phi\alpha_0 T_2\right]$ *объем воздушного колпака произволен.*

Важность этих результатов становится более очевидной, если вспомнить, что воздушный колпак, размеры которого вначале являлись достаточными, из-за утечек воздуха может быть приведен к опасному объему, лежащему в пределах T'_3 и T''_3, с чем связана потеря возможности регулирования в ходе производства. Для того чтобы избежать подобного случая, полезно при применении воздушного колпака выбирать приведенную вращающуюся массу, соответствующей условию

$$T_1 \geqslant \frac{1}{2}\Phi T_2. \qquad (27a)$$

Существеннейшее влияние на величину воздушного колпака оказывают также скорость в напорном трубопроводе и сопротивление движению воды. Если взять относительно короткий трубопровод $\left(\text{малые } \frac{L}{h_0}\right)$ с большим диаметром и ма-

лой скоростью, для которой величина ε может быть принята равной нулю, то из условия (27) следует:

$$T_3 < \frac{T_1 [T_1 - \alpha_0 T_2]}{2\alpha_0^2 T}, \tag{28}$$

т. е. *при малых гидравлических сопротивлениях объем воздушного колпака не должен превосходить определенного максимума.*

В этом случае приведенная вращающаяся масса должна быть больше „нормальной“ $[T_1 > \alpha_0 T_2]$, иначе объем воздушного колпака будет отрицательным. Можно также задаться величиной воздушного колпака и вычислить приведенную вращающуюся массу. Условие (27) дает:

$$T_1 > \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{8\frac{T_3}{T_2} + 1}\right]\alpha_0 T_2. \tag{29}$$

При малых скоростях c_0 частное $\frac{T_3}{T_2}$ может принимать весьма большие значения; сравнение с условием (22) дает поэтому правило:

в предельном случае $\varepsilon = 0$ турбина, снабженная воздушным колпаком, должна иметь бо́льшую приведенную вращающуюся массу, чем турбина, не имеющая воздушного колпака.

Это положение заслуживает внимания, потому что каждый трубопровод из-за упругости своих стенок при колебаниях давления способен к известному расширению, которое играет такую же роль, как маленький воздушный колпак у жесткого трубопровода. Таким образом показано, что приведенную вращающуюся массу нельзя делать чересчур малой.

2. РЕГУЛИРОВАНИЕ ПРИ ПОМОЩИ МЕДЛЕННО ДЕЙСТВУЮЩЕГО СЕРВОМОТОРА

Сущность этого способа регулирования выяснится из следующего рассмотрения. Обозначим через S точку муфты регулятора, высота поднятия которой (ход) равна s. Мы предпо-

лагаем, что с сервомотором, управляющим регулирующей заслонкой, связан идеальный механизм, лишенный трения, который обладает тем свойством, что его точка S', находящаяся в непосредственной близости от S, описывает траекторию, конгруэнтную траектории точки S, и при равновесном режиме совпадает с точкой S. Высоту поднятия S' (координату) обозначим через s' и будем отсчитывать ее от того же начала, так что для равновесного режима всегда $s=s'$ и, в частности, для исходного равновесного режима $s'=s_0$. Положительным направлением как для s, так и для s' выбираем такое, для которого росту скорости соответствует приращение обеих величин. Если вследствие изменения нагрузки точка S регулятора смещается в каком-нибудь направлении, то точка S' начинает двигаться в том же направлении со скоростью, зависящей от сервомотора, но, вообще говоря, отличной от скорости точки S. Движение, и следовательно регулирование, продолжается до тех пор, пока S' снова не совпадет с S. Если S движется назад, то S' должна за ней следовать. Таким образом, характерным для устройства является то, что пока $s=s'$, сервомотор находится в покое; если же $s' \gtrless s$, то возникает движение сервомотора и при этом такое, что точка S' движется по направлению к точке S. Для вычислений это условие удобнее всего представить в виде

$$\frac{ds'}{dt} = \sigma_0 \frac{s - s'}{s_0}, \tag{30}$$

т. е. принять, что скорость точки S' пропорциональна расстоянию между точками S и S'. Так как $(s-s')$ отрицательно, когда $s' > s$, то выражение (30) правильно учитывает и направление движения.[18]

Ход статического регулятора, если пренебрегать его массой и трением, является функцией скорости турбины и для малых изменений может быть принят пропорциональным последней, т. е. мы можем писать:

$$\frac{s-s_0}{s_0}=\alpha\frac{v-v_0}{v_0}=\alpha x. \tag{31}$$

Введем новую переменную, определяемую уравнением

$$\frac{s'-s_0}{s_0}=\alpha w. \tag{32}$$

Таким образом w есть безразмерное число, пропорциональное „процентному“ изменению хода s'. Запишем уравнение (30) в форме:

$$\frac{ds'}{dt}=\sigma_0\left[\frac{s-s_0}{s_0}+\frac{s_0-s'}{s_0}\right].$$

Далее полагаем $T_0=\frac{s_0}{v_0}$ и вводим эту величину, а также x и w в выражение для $\frac{ds'}{dt}$. Последнее примет вид:

$$T_0\frac{dw}{dt}=x-w. \tag{33}$$

Механический смысл величины T_0 вытекает из следующего. Скорость $\frac{ds'}{dt}$ будет наибольшей, когда разность $s-s'$ становится максимальной. Это имеет место тогда, когда точка S находится в самом верхнем, а точка S' — в самом нижнем положении, или наоборот. Очевидно, в этом случае $s-s'$ равно полному ходу регулятора, который мы впредь будем обозначать через s_r, и мы получим:

$$\left(\frac{ds'}{dt}\right)_{\max}=\sigma_0\frac{s_r}{s_0}.$$

Отсюда

$$T_0=\frac{s_r}{\left(\frac{ds'}{dt}\right)_{\max}}, \tag{34}$$

т. е. T_0 — *это время, необходимое сервомотору для того, чтобы полностью закрыть (или открыть) каналы направляющего*

аппарата, когда движение происходит с максимальной скоростью.[19]

Назовем T_0 для краткости *временем сервомотора (временем регулирования)*. Тогда $\frac{1}{T_0}$ явится масштабом для *скорости сервомотора (скорость регулирования)*. Величину действительного промежутка времени, в течение которого будет пройден путь $s_2' - s_1'$ при постоянном s, найдем при помощи интегрирования:

$$t_0 = T_0 \ln \frac{s_1' - s}{s_2' - s}.$$

Если в конечном положении разность $s_2' - s$ равна, например, $^1/_{100}$ величины начальной разности $s_1' - s$, то $t_0 = 4.6\,T_0$; напротив, для $s_2' - s = 0$ значение $t_0 = \infty$, т. е. путь, который необходимо пройти, чтобы совместить точки S' и S, будет пройден в бесконечно-большой промежуток времени. Эта особенность приведенной выше формулы учитывает достаточно правильно так называемый „мертвый ход", имеющийся у каждого сервомотора, который (из-за перекрытия органов управления) приводит к тому, что сервомотор никогда не придет в положение, точно соответствующее смещению муфты регулятора, но всегда останавливается немного выше или ниже.

Для сервомоторов, которые, как, например, сцепные механизмы, регулируют с постоянной скоростью, полученные формулы справедливы лишь в известных границах. Вычисленное выше t_0, выражающее время закрытия 99% всех направляющих каналов, приближенно можно положить равным времени фактического действия. Можно также оценить соответствующую величину T_0.

Остальные основные уравнения можно легко вывести из доказанного в первом разделе. Для движения приведенной вращающейся массы, как и ранее, имеем:

$$\frac{M v_0}{P_0} \frac{dx}{dt} = \frac{P - Q}{P_0} = \Pi + \frac{f - f_0}{f_0} - \frac{v - v_0}{v_0} + 3 \frac{u - u_0}{u_0}.$$

Из-за относительной независимости друг от друга точек S и S', поперечное сечение f непосредственно является функцией только s', причем для малых изменений можно предположить, что эта функциональная зависимость линейная. Тогда будем иметь:

$$\frac{f-f_0}{f_0} = -\beta\frac{s'-s_0}{s_0} = -\alpha\beta w.$$

Здесь $\alpha\beta$ равно коэффициенту α_0 предыдущего раздела, причем в состоянии равновесия $w=x$, так что $\frac{f-f_0}{f_0} = -\alpha\beta x = -\alpha_0 x$.

При указанном выше значении для изменений поперечного сечения и при прежних обозначениях получим:

$$T_1\frac{dx}{dt} = \Pi - \alpha_0 w - x + \frac{3}{2}z.$$

Уравнение для ускорения водяного столба остается неизменным, и лишь в уравнении для колебаний уровня воды в воздушном колпаке x заменено через w.

Мы получим следующую систему основных уравнений:[20]

$$\left.\begin{aligned} &T_0\frac{dw}{dt} + w - x = 0, \\ &T_1\frac{dx}{dt} + \alpha_0 w + x - \frac{3}{2}z = \Pi, \\ &T_2\frac{dy}{dt} + \varepsilon y + z = 0, \\ &T_3\frac{dz}{dt} - \alpha_0 w - y + \frac{1}{2}z = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (35)$$

Интегрирование этих уравнений проводится по той же схеме, как и в первом разделе.

Так как характеристическое уравнение будет четвертой степени, то сделать из него общие выводы не так-то легко. Мы ограничимся поэтому рассмотрением случая, когда воздушный колпак отсутствует, т. е. когда $T_3 = 0$. Примем

также $\varepsilon=0$, ибо мы уже видели, что в случае отсутствия воздушного колпака эта величина мало влияет на окончательный результат. Тогда из последнего уравнения (35) можно определить z и подставить его в первые три. В результате получим:

$$\left.\begin{aligned} &T_0\frac{dw}{dt}+w-x=0,\\ &T_1\frac{dx}{dt}-2\alpha_0 w+x-3y=\Pi,\\ &T_2\frac{dy}{dt}+2\alpha_0 w+2y=0.\end{aligned}\right\}\qquad(36)$$

Решение этой системы приводит к следующему характеристическому уравнению:[21]

$$T_0T_1T_2\varphi^3+[2T_0T_1+T_1T_2T_0]\varphi^2+$$
$$+[2T_0-(2\alpha_0-1)T_2+2T_1]\varphi+2(\alpha_0+1)=0.\qquad(37)$$

Если корни этого уравнения действительные и различные, то получим следующее решение:

$$\left.\begin{aligned} &w=\theta+\lambda m_1e^{\varphi_1t}+\mu m_2e^{\varphi_2t}+\nu m_3e^{\varphi_3t},\\ &x=\theta+\lambda a_1e^{\varphi_1t}+\mu a_2e^{\varphi_2t}+\nu a_3e^{\varphi_3t},\\ &y=-\alpha_0\theta+\lambda b_1e^{\varphi_1t}+\mu b_2e^{\varphi_2t}+\nu b_3e^{\varphi_3t}.\end{aligned}\right\}\qquad(38)$$

Здесь введены обозначения:

$$\theta=\frac{\Pi}{\alpha_0+1};\qquad(39)$$

$$m_k=(T_2\varphi_k+2);\quad a_k=(T_0\varphi_k+1)\,(T_2\varphi_k+2);$$

$$b_k=-2\alpha_0;\ k=1,2,3.$$

Величины λ, μ, ν можно определить из уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &0=\theta+m_1\lambda+m_2\mu+m_3\nu,\\ &0=\theta+a_1\lambda+a_2\mu+a_3\nu,\\ &0=-\theta\alpha_0+b_1\lambda+b_2\mu+b_3\nu.\end{aligned}\right\}\qquad(40)$$

Если, напротив, два корня характеристического уравнения комплексно-сопряженные, а именно $\varphi_2 = r + si$, $\varphi_3 = r - si$, то получим решение:

$$\left.\begin{aligned} w &= \theta + \lambda m_1 e^{\varphi_1 t} + \\ &\quad + 2\left[(\mu\rho_2 - \nu\rho_3)\cos st - (\mu\rho_3 + \nu\rho_2)\sin st\right]e^{rt}, \\ x &= \theta + \lambda a_1 e^{\varphi_1 t} + \\ &\quad + 2\left[(\mu\alpha_2 - \nu\alpha_3)\cos st - (\mu\alpha_3 + \nu\alpha_3)\sin st\right]e^{rt}, \\ y &= -\alpha_0\theta + \lambda b_1 e^{\varphi_1 t} + \\ &\quad + 2\left[(\mu\beta_2 - \nu\beta_3)\cos st - (\mu\beta_3 + \nu\beta_2)\sin st\right]e^{rt}. \end{aligned}\right\} \quad (41)$$

Здесь введены обозначения:

$$\left.\begin{aligned} & m_1 = (T_2\varphi_1 + 2);\ \alpha_1 = (T_0\varphi_1 + 1)\ (T_2\varphi_1 + 2);\ b_1 = -2\alpha_0; \\ & \rho_2 = (T_2 r + 2);\quad \alpha_2 = (T_0 r + 1)\ (T_2 s + 2) - T_0 T_2 s^2; \\ & \qquad\qquad \beta_2 = -2\alpha_0; \\ & \rho_3 = T_2 s;\ \alpha_3 = (T_0 r + 1)\ T_2 s + (T_2 s + 2)\,T_0 s;\ \beta_3 = 0. \end{aligned}\right\} \quad (41а)$$

Для определения постоянных λ, μ, ν в этом случае служат уравнения:

$$\left.\begin{aligned} \theta + m_1\lambda + 2\rho_2\mu - 2\rho_3\nu &= 0, \\ \theta + a_1\lambda + 2\alpha_2\mu - 2\alpha_3\nu &= 0, \\ -\alpha_0\theta + b_1\lambda + 2\beta_2\mu - 2\beta_3\nu &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (41б)$$

Дискуссия результатов

Так как по форме решение идентично с тем, которое было найдено в первом разделе, то установленные там соотношения для коэффициентов характеристического уравнения применимы и в данном случае. Коэффициент d здесь всегда положителен, так что корень всегда будет отрицателен. Мы имеем таким образом два основных условия:

1) когда все корни действительные, то

$$2(T_0 + T_1) - (2\alpha_0 - 1)T_2 > 0: \quad (42)$$

2) когда два корня комплексные, то

$$[T_1 T_2 + T_2 T_0 + 2T_0 T_1][2T_0 +$$

$$+2T_1-(2\alpha_0-1)T_2]-2(\alpha_0+1)T_0T_1T_2>0. \qquad (43)$$

В качестве критерия того, будут ли корни действительными или мнимыми, служит выражение (19).

Здесь может быть поставлен следующий основной вопрос: *какой должна быть величина скорости сервомотора, чтобы осуществлялось регулирование с затухающими колебаниями?*

Чтобы ответить на этот вопрос, расположим выражение (43) по степеням T_0:

$$F(T_0)=2[2T_1+T_2]T_0^2+[(2T_1+T_0)^2-2\alpha_0T_2(3T_1+ \\ +T_2)]T_0+[(2T_1+T_2)-2\alpha_0T_2]T_1T_2>0. \qquad (44)$$

Если считать T_1 и T_2 выбранными или заданными, то соотношение (44) дает условие, которому должно удовлетворять T_0. Положим:

$$F(T_0)=AT_0^2+2BT_0+C=0, \qquad (45)$$

где

$$\left.\begin{aligned} A&=2[2T_1+T_2], \\ 2B&=[(2T_1+T_0)^2-2\alpha_0T_2(3T_1+T_2)], \\ C&=[(2T_1+T_2)-2\alpha_0T_2]T_1T_2 \end{aligned}\right\} \qquad (45а)$$

и обозначим через T_0' наименьший, а через T_0'' наибольший из корней уравнения (45), а именно

$$T_0'=\frac{-B-\sqrt{B^2-AC}}{A}; \quad T_0''=\frac{-B+\sqrt{B^2-AC}}{A} \qquad (46)$$

Тогда необходимо различать следующие случаи:

1. Корни действительные:

а) $C<0$, T_0' отрицательно, T_0'' положительно. Функция $F(T_0)$ положительна, если T_0 выбрано либо меньше, чем T_0', либо больше, чем T_0''. Так как отрицательные значения T_0 не имеют смысла, в качестве условия того, что $F(T_0)>0$, остается лишь $T_0>T_0''$.

б) $C>0$ и $B<0$. Как T_0', так и T_0'' будут положительными, причем легко заметить, что в общем случае $T_0''>T_0'$. Поэтому должно быть $T_0<T_0'$ или $T_0>T_0''$.

в) $C>0$ и $B>0$. При $T_0>0$ оба корня отрицательные.

2. Оба корня мнимые. Функция $F(T_0)$ не меняет знака, и так как для $T_0=\infty$ она положительна, то остается положительной для любых значений T_0. Опять достаточно неравенства $T_0>0$. Знак коэффициентов зависит от T_1 и T_2. Разложим B на два множителя:

$$2B=\left[2T_1-\frac{1}{2}(3\alpha_0+\sqrt{(9\alpha_0+8)\alpha_0})T_2\right]\left[2T_1-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}(3\alpha_0-\sqrt{(9\alpha_0+8)\alpha_0})T_2\right].$$

Второй множитель всегда положителен, так что знак зависит от первого множителя. Пренебрегая единицей по сравнению с α_0, получим для первого множителя выражение:

$$2T_1-3\alpha_0T_2.$$

Отсюда ясно, что $B\lesseqgtr 0$, если $T_1\gtreqless 1.5\alpha_0T_2$.

В выражении для C пренебрежем также единицей по сравнению с α_0. Тогда получим, что $C\gtreqless 0$, если $T_1\lesseqgtr\alpha_0T_2$; A всегда положительно.

Легко убедиться, что для чаще всего встречающихся значений α_0 (примерно 25—100) детерминант B^2-AC отрицателен, если T_1 лежит между $1.3\div1.4\,x\,\alpha_0T_2$ и $1.6\div1.75\,\alpha_0T_2$. Отсюда видно, что характер корней определяется отношением T_1 к α_0T_2, причем:

а) один из корней положителен, другой отрицателен, если $0<T_1<\alpha_0T_2$;

б) оба корня положительны, когда $\alpha_0T_2<T_1<\sim1.3\,\alpha_0T_2$;

в) оба корня мнимые, когда $1.3\,\alpha_0T_2<T_1<\sim1.7\,\alpha_0T_2$;

г) оба корня положительны, когда $1.7\,\alpha_0T_2<T_1<\infty$.

Если принять во внимание, что $T_1=\alpha_0T_2$ определяет минимальную приведенную вращающуюся массу, которую, со-

гласно разд. 1, должна иметь турбина без воздушного колпака, и если назвать эту вращающуюся массу, как ранее, „нормальной“, то условия, при которых $F(T_0) > 0$, можно записать в следующей форме:

1) *пока приведенная вращающаяся масса меньше „нормальной“* $[T_1 < \alpha_0 T_2]$, *время сервомотора для погашения нарастающих колебаний должно быть выбрано большим* $[T_0 > T_0'']$;

2) *для приведенных вращающихся масс, величины которых несколько превышают „нормальную“* [$\alpha_0 T_2 < T_1 < 1.3\,\alpha_0 T_2$ до $1.5\,\alpha_0 T_2$], *время сервомотора должно быть или очень большим* $[T_0 > T_0'']$ *или очень малым* $[T_0 < T_0']$; *интервалу между* T_0' и T_0'' *соответствуют колебания давления и скорости с нарастающей амплитудой;*

3) *при больших приведенных вращающихся массах* $[T_1 > 1.3\,\alpha_0 T_0 \div 1.5\,\alpha_0 T_0]$, *несмотря на малую скорость сервомотора, регулирование происходит с затухающими колебаниями.*

Важно также заметить, что *уменьшение скорости сервомотора связано с ростом максимума отклонений скорости даже в том случае (в известных границах), когда регулирование совершается без периодических колебаний.*

Представим себе время сервомотора выбранным необычайно большим. Тогда, например в случае разгрузки, когда поперечное сечение трубопровода очень медленно сужается, рабочее колесо турбины будет двигаться ускоренно до тех пор, пока касательное давление, падающее с ростом скорости, несмотря на малое изменение массы воды, станет равным сопротивлению. Это равновесие отвечает относительному („процентному“) возрастанию окружной скорости на величину, которая примерно равна относительному („процентному“) изменению нагрузки. В соответствии с медленно суживающимся сечением канала примем, что скорость постепенно убывает и что постепенно устанавливается новый стационарный режим. Подобному регулированию соответствует первый случай, второй случай —

при $T_0 > T_0''$ и третий случай — при очень большом T_0. Обычно это регулирование будет непригодным из-за больших скачков скорости, несмотря на то, что колебания при этом будут уменьшаться.

В заключение рассмотрим один практически важный частный случай.

Открытая турбина

В случае открытой турбины можно положить $c_0 = 0$. Тогда характеристическое уравнение запишется в форме:

$$T_0 T_1 \varphi^2 + (T_0 + T_1)\varphi + (\alpha_0 + 1) = 0. \tag{47}$$

Интересно лишь определение максимального отклонения скорости после внезапного изменения нагрузки. Если корни уравнения (47) действительные, равные φ_1 и φ_2, то

$$x = \frac{\Pi}{\alpha_0 + 1}\left[1 + \frac{\varphi_2}{\varphi_1 - \varphi_2} e^{\varphi_1 t} - \frac{\varphi_2}{\varphi_1 - \varphi_2} e^{\varphi_2 t}\right]. \tag{48}$$

Если, напротив, φ_1 и φ_2 комплексные, и $\varphi_1 = r + si$ и $\varphi_2 = r - si$, то

$$x = \frac{\Pi}{\alpha_0 + 1}\left[1 + \left\{-\cos(st) + \frac{T_0(r^2 + s^2) + r}{s}\sin(st)\right\} e^{rt}\right]. \tag{49}$$

Поскольку все коэффициенты уравнения (47) положительны, как действительные корни, так и действительные части мнимых корней будут отрицательными.

Соответствующие выражения для корней:

$$\left.\begin{matrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{matrix}\right\} = \frac{-(T_0 + T_1) \pm \sqrt{D}}{2\, T_0 T_2}. \tag{50}$$

Здесь

$$D = (T_0 + T_1)^2 - 4(\alpha_0 + 1) T_0 T_1 = \left[T_0 - \{(2\alpha_0 - 1) + 2\sqrt{\alpha_0(\alpha_0 - 1)}\} T_1\right]\left[T_0 - \{(2\alpha_0 - 1) - 2\sqrt{\alpha_0(\alpha_0 - 1)}\} T_1\right]$$

или приближенно (так как единица мала по сравнению с α_0)

$$D = [T_0 - 4\alpha_0 T_1]\left[T_0 - \frac{1}{4\alpha_0} T_1\right].$$

Отсюда видно, что $D > 0$, т. е. корни будут действительными, когда или оба множителя положительны, или оба множителя отрицательны, т. е. когда

$$\text{или } T_0 < \frac{1}{4\alpha_0} T_1 \text{ или } T_0 > 4\alpha_0 T_1. \qquad (51)$$

В этом случае регулирование не сопровождается колебаниями. При этом, как уже было замечено выше, существенно различаются между собой случай регулирования в предположении $T_0 < \frac{1}{4\alpha_0} T_1$, и случай, когда $T_0 > 4\alpha_0 T_1$. В первом случае x приближается при всех обстоятельствах без колебаний к пределу $\frac{\Pi}{\alpha_0 + 1}$; во втором случае x растет сначала выше $\frac{\Pi}{\alpha_0 + 1}$, чтобы затем уменьшиться до этой величины. Это можно доказать и в общем случае. Вычислим из уравнения $\frac{dx}{dt} = 0$ то значение времени t_m, для которого x в уравнении (48) достигнет максимума. Получим:

$$t_m = \frac{\lg e}{\varphi_1 - \varphi_2} \lg \frac{T_0 \varphi_2 + 1}{T_0 \varphi_1 + 1}. \qquad (52)$$

Здесь, в соответствии с уравнениями (50), $\varphi_1 - \varphi_2$ всегда положительно. Легко также показать, что $\frac{T_0 \varphi_2 + 1}{T_0 \varphi_1 + 1} \gtrless 1$, если $T_0 > 4\alpha_0 T_1$ или $T_0 < \frac{1}{4\alpha_0} T_1$, поэтому логарифм, а вместе с тем и t_m при тех же условиях положительны или отрицательны.

Это означает, что в случае $T_0 < \frac{1}{4\alpha_0} T_1$ имеется максимум отклонения скорости для отрицательного времени (следова-

тельно, в действительности мы его не получим); тогда как в случае $T_0 > 4\alpha_0 T_1$ наступает максимум (для положительного времени) и притом единственный. Так как этот максимум в общем случае очень велик, то время сервомотора должно быть меньше $4\alpha_0 T_1$. Для случая комплексных корней из числовых примеров можно убедиться, используя уравнения (49), что максимум имеющих место отклонений скорости растет чрезвычайно быстро с ростом T_0, начиная от значения $T_0 = \frac{1}{4\alpha_0} T_1$, так что время сервомотора не только не должно достигать значения $T_0 = 4\alpha_0 T_1$, но и должно быть существенно меньше этого значения. Таким образом можем сделать следующий вывод:

в случае открытой турбины никогда не возникают колебания скорости с возрастающей амплитудой; при очень большом или очень малом времени сервомотора оно осуществляется, вообще говоря, без колебаний; с ростом T_0 растет также и величина наблюдаемого наибольшего отклонения скорости, и поэтому последняя является тем фактором, который определяет допустимый максимум времени сервомотора.

Заключение

При выборе соотношений, которые следует соблюдать, чтобы не превысить заданного значения для x_{max} : П, из-за сложности рассматриваемых функций приходится прибегать к пробным подсчетам. Для того чтобы быстро достигнуть цели, необходимо иметь заранее составленные таблицы, разработку которых автор пока откладывает.

Важно то, что, используя различные факторы, можно предотвратить нарастание колебаний давления и скорости, и формулы, играющие роль критерия, к счастью, настолько просты, что возможен быстрый контроль существующих или проектируемых установок. Также легко вычислить предельные

значения, соответствующие переходному процессу без колебаний. Чтобы эти формулы сделать более удобными для использования, следует перейти в них к параметрам, характеризующим турбину. Наиболее неблагоприятный случай для регулирования будет тогда, когда турбина работает при максимальной нагрузке. Направляющее сопло будет открыто полностью, поэтому $f=f_1$ и коэффициент $\alpha_0=\frac{1}{\delta}$, где δ, как было определено ранее, означает степень неравномерности регулятора (если пренебречь, конечно, собственным трением регулятора). Применение медленно действующего сервомотора всегда требует, как следует из сказанного выше, увеличения приведенной вращающейся массы или воздушного колпака, поэтому будем рассматривать лишь мгновенно действующий сервомотор.

Для закрытой турбины без воздушного колпака минимальная допустимая приведенная вращающаяся масса была $T_1>\alpha_0 T_2$; приведенная же масса, при которой переходный процесс не сопровождается колебаниями, соответствовала $T_1'>(2+\sqrt{3})\alpha_0 T_2$.

Обозначим через $G_s=Mg$ вес приведенной вращающейся массы, тогда после подстановки $\alpha_0=\frac{1}{\delta}$ и $T_2=\frac{L}{h_0}\frac{c_0}{g}$

$$G_s>\left(\frac{1}{\delta}\right)\left(\frac{L}{h_0}\right)\left(\frac{c_0}{v_0}\right)P_0. \qquad (53)$$

Обозначим далее через G_w *расход воды*, тогда $P_0=\frac{\eta G_w H}{v_0}$. Так как здесь прежде всего рассматриваются турбины Жирара,[22] и мы можем удовлетвориться приближенными предельными значениями, то приведенная окружная скорость v_0 будет равна половине теоретической скорости истечения $v_0=\frac{1}{2}\sqrt{2gH}$, а пьезометрическая высота h_0 равна всему напору H.

Введя эти величины в предыдущую формулу, получим:

$$G_s > \frac{2\eta}{g}\frac{L}{H}\frac{c_0}{\delta}G_w. \tag{54}$$

Для закрытых турбин с очень малыми приведенными вращающимися массами была определена минимальная величина воздушного колпака (для случая затухания колебаний) соотношением $T_3 > \frac{T_2}{\varepsilon}$. Подставив значения $T_2 = \frac{Lc_0}{hg}$ и $\varepsilon = \frac{\xi_r L c_0^2}{g h_0 d_0}$, вычислим при помощи $T_3 = l_0 p_0 : c_0 (p_0 + p_a)$ предельный *объем воздуха* $W = Fl_0$ в воздушном колпаке. Получим:

$$W_{\min} > \frac{\pi}{4}\frac{p_0 + p_a}{p_0}\frac{d_0^3}{\xi_r}. \tag{55}$$

Легко можно показать прежним способом, что если воздушный колпак выбран в соответствии с соотношением:

$$W > \frac{1}{\varepsilon}(2 - \varepsilon + 2\sqrt{1 - \varepsilon})W_{\min}$$

или для малых ε соответственно

$$W > \frac{4}{\varepsilon}W_{\min}, \tag{56}$$

то переходный процесс не будет сопровождаться колебаниями. Возьмем $\eta = 0.75$; $g \approx 10$; $\delta = 0.05 = \frac{1}{20}$; для безопасности возьмем $\zeta_r = 0.02$. Пусть также имеется воздушный колпак, который собственно нужен при турбинах высокого давления. Примем, что максимум выражения $(p_0 + p_a) : p_0 = (4 + 1) : 4 = 5 : 4$. Скорость в трубопроводе возьмем равной $c_0 = 1$ м/сек. Получим следующее удобное правило:

$$G_s > 3\left(\frac{L}{H}\right)G_w, \tag{57}$$

$$W_{\min} > 50 d_0^3, \tag{58}$$

т. е. *минимальный вес приведенной вращающейся массы закрытой турбины без воздушного колпака равен утроенному весу воды, протекающей в секунду, умноженному на отношение длины трубопровода к напору. Для того чтобы получить переходный процесс без колебаний, надо вычисленный вес увеличить в* $(2+\sqrt{3}) = 3.7$ *раза.*

Объем воздуха в колпаке закрытой турбины с произвольно малыми приведенными вращающимися массами должен быть не менее 50-кратного объема куба со стороной, равной диаметру трубопровода, и не зависит от длины трубопровода. Чтобы получить переходный процесс без колебаний, надо вычисленный объем увеличить в $\frac{4}{\varepsilon}$ *раза.*

С помощью этих основных правил можно решить вопрос, что выгоднее применить: большие приведенные вращающиеся массы или большой воздушный колпак?

Часто целесообразнее прибегать к наиболее дешевому средству, а так как величина воздушного колпака не зависит от длины трубопровода, то в случае короткого трубопровода стоимость воздушного колпака существенно отражается на общей стоимости установки. С другой стороны, вес приведенных вращающихся масс пропорционален длине трубопровода; поэтому для коротких трубопроводов в качестве средства защиты лучше выбирать вращающиеся массы, а для длинных трубопроводов — воздушный колпак.

Автору недавно пришлось изучить ряд турбинных установок с большими напорами и длинными трубопроводами, и он нашел, что всюду, где регулирование удовлетворяло необходимым требованиям, установленные в данной работе соотношения выдерживались.

В качестве примера можно привести электрическую осветительную установку в Женеве и центральную станцию для электрического освещения и трамвайного движения в Монтре. Первая описана в известном труде Туреттини „Использова-

ние движущих сил Роны“, последняя — в газете „L'Industrie électrique“, сентябрь, № 1.

В Монтре, помимо первичных машин для электрического трамвая, который потребляет мощность, изменяющуюся от 0 до 60 л. с., установлены две турбины высокого давления по 300 л. с. каждая, которые приводят в движение две динамо-машины переменного тока, предназначенные для освещения. Каждая из больших турбин снабжена маленькой турбиной примерно в 35 л. с., связанной с главным валом при помощи ременной передачи для приведения в действие динамо возбуждения. Напор равен 250 м, длина трубопровода 900 м; диаметр трубопровода в верхней части равен 450 мм, внизу 400 мм, в среднем 425 мм. Имеются два воздушных колпака диаметром примерно в 870 мм и с длиной воздушного столба в 2500 мм, т. е. с объемом воздуха, в совокупности равным 3 м³. Если вычислим, согласно неравенству (55), при $\zeta_r = 0.02$ минимальный объем колпака, то получим: $W_{\min} \cong 3.1$ м³, т. е. немного более полученного выше. Установка таким образом находится на границе допустимого, и так как приведенная вращающаяся масса состоит лишь из турбинного колеса и динамо, т. е. во всяком случае может считаться малой, то это является основанием для того, чтобы подобной установкой регулировать не большие турбины, а малые. Вначале динамо возбуждения приводятся в движение при помощи ременной передачи от главного вала; с увеличением нагрузки начинают действовать их собственные турбины, и на главном валу получается излишек силы. При дальнейшем росте нагрузки у большой турбины вручную увеличивают отверстие направляющего сопла, вследствие чего регулятор вспомогательной турбины уменьшает приток воды, и т. д. Установка функционирует подобным образом без каких-либо затруднений, и никогда не возникает больших колебаний давления, хотя по вечерам иногда снимается до 700 л. с.

В Женеве „Общество электрической аппаратуры“ имеет осветительную станцию с четырьмя турбинами высокого давления (из которых одна резервная) по 200 л. с. каждая, присоединенными к трубопроводу высокого давления муниципальной водопроводной станции и снабженными гидравлическим регулятором с сервомотором Пикара. Разветвленная сеть высокого давления, образующая различные кольцевые запоры, соединена при помощи трубопровода длиной 4000 м и диаметром 600 мм с резервуаром, лежащим на высоте 123 м. Таким образом, имеется исключительно неблагоприятное соотношение длины трубопровода и высоты напора, равное $4000 : 123 = 32^1/_2$, даже если пренебречь кольцевой сетью. Эта необыкновенная длина трубопровода вызывает колоссальную трату средств, чтобы было возможно регулирование, если оно случайно почему-либо не осуществилось.

Дело в том, что вначале не был предусмотрен резервуар высокого давления и думали обойтись лишь одними воздушными колпаками. Были установлены четыре таких колпака диаметром 1.5 м и длиной 12 м, так что суммарный объем содержащегося в них воздуха равнялся 50 м³. Помимо этого, у самих насосов установлено в настоящее время еще 14 маленьких воздушных колпаков диаметром 1.0—1.1 м и с длиной воздушного столба 4—6 м, что дает также 50 м³ воздушного объема. Таким образом, получается, что в водопроводной сети имеется колоссальная воздушная подушка объемом 100 м³. Для оценки процесса регулирования сделаем наиболее неблагоприятные предположения, причем будем рассматривать три центральные турбины как одну установку в 600 л. с.

При рассмотрении необходимо предположить, что расход через стальной трубопровод постоянен или, по крайней мере, изменяется медленно, так как большинство моторов, исчисляемых сотнями, мало (мощностью от 2—3 до 100 л. с.), и много воды расходуется для домашних нужд. Наибольшая

скорость в главной магистрали установлена около 1 м/сек. и регулируется ускорением или замедлением хода насоса. Когда турбины центральной станции дают 600 л. с. (что бывает не всегда), то это обусловливает расход воды 500 л/сек. Напорный трубопровод доставляет однако только 280 л/сек., вследствие чего недостающее количество должно восполняться насосами. Излишек воды, поступающей от насосов, распределяется по сети. В этом случае скорость в напорном трубопроводе меньше, чем это соответствует потреблению турбины. Поэтому необходимо соответственно изменить и первоначальные дифференциальные уравнения (6). Тогда, например, для величины воздушного колпака, который необходим при исчезающе малых приведенных вращающихся массах для гашения нарастающих колебаний, найдем значения:

$$T_3 > \frac{c_0'}{c_0} \frac{T_2}{\varepsilon}.$$

Отсюда приближенно

$$W_{\min} > \frac{c_0'}{c_0} \frac{d_0^3}{\zeta_r},$$

где c_0 — действительная скорость в напорном трубопроводе;
c_0' — скорость, которая имелась бы в трубопроводе, если бы все потребление установки покрывалось расходом главной магистрали.

В нашем случае, как ранее было указано, $c_0 = 1$ м/сек., $c_0' \approx 1.8$ м/сек., так что $W_{\min} > 19.4$ м³; имеется, однако, 100 м³, т. е. пятикратное значение наименьшей величины (малым значениям c_0 в течение дня соответствуют малые c_0', так как моторы работают с незначительными мощностями).

Несмотря на исключительную длину трубопровода в Женеве, из приведенных рассуждений становится не только понятным, но и с неизбежностью вытекает, что отсутствие затруднений с регулированием, если не учитывать влияние

вращающейся массы турбины, является результатом лишь исключительно большого объема воздушных колпаков.

Другие установки давали аналогичные совпадения с нашими результатами, поэтому автор предполагает, что приведенные соотношения для предельных значений приведенной вращающейся массы и величины воздушного колпака должны быть изучены товарищами по специальности, и я был бы весьма признателен за сообщение различных подходящих случаев из практики, относящихся к проблеме регулирования.

Исследование нуждается еще во многих дополнениях (в частности, касающихся сервомотора с постоянной скоростью, влияния масляного катаракта, тормозящего движение регулятора, и т. п.). Все это, как и разбор конструкций регуляторов, должно явиться содержанием последующих исследований.



О РЕГУЛИРОВАНИИ ТУРБИН. II.



Опубликованное в предыдущем томе „Schweizerischen Bauzeitung“ исследование автора по данному вопросу являлось первым итогом работы, имеющей целью выяснить принципиальные моменты, характеризующие регулирование турбин. Как было указано в заключении исследования, оно нуждалось во многих дополнениях. Эти дополнения, в первую очередь, должны относиться к двум вопросам. Во-первых, нужно исследовать действие катаракта и, во-вторых, в связи с действием катаракта, нужно исследовать влияние инерции регулятора, который в действительности всегда обладает массой. В дальнейшем будет рассмотрено влияние обоих факторов. Благодаря исключительной любезности фирмы Эшер-Висс и K° и инженера Петера, директора городского водопровода, автор в состоянии дать также отчет об опытах с маленькой пробной турбиной. Эта турбина представляла собой так называемое колесо Пельтона диаметром 300 мм системы Эшер-Висс и K°, изготовленное этой фирмой и установленное в ее новых мастерских в Харде. К этой турбине, по распоряжению директора Петера, был присоединен трубопровод длиной 200 м из чугунных труб диаметром 70 мм, так как предполагалось, что результаты экспериментов с тур-

биной найдут полезное применение в городском водопроводе в связи с дальнейшим увеличением мощности его силовых установок.

Потребляемая вода бралась попеременно то из фабричного резервуара, то из городского водопровода при давлении либо 28 м, либо 45—60 м. Турбина могла тормозиться при помощи тормоза Прони, однако обычно использовался тормоз с колодками, который легче, чем тормоз Прони, осуществлял мгновенное изменение нагрузки. Был предусмотрен также воздушный колпак диаметром 700 мм и длиной 1400 мм, который мог наполняться при помощи парового питательного насоса, установленного в кочегарке. Наличие переключающего клапана давало возможность работать по выбору с трубопроводом малой или большой длины. Изменения вращающейся массы достигались при помощи попеременной установки маленьких и больших маховиков на оси турбины.

Опыты должны были прежде всего практически доказать эффективность нагнетательного колпака, так как из практики сложилось мнение, что нагнетательный колпак при всех обстоятельствах приводит к возрастанию колебаний. Опыт доказал, что это мнение ошибочно, что, напротив, нагнетательный колпак даже умеренных размеров в действительности влияет исключительно благоприятно. Турбина работала большей частью с нагрузкой в 1 л. с., и требовалось только 10—15 л воздуха, чтобы почти полностью погасить колебания давления.

В соответствии с теорией, опыты привели к следующим, очень интересным и весьма мало известным результатам. В то время как при умеренном объеме воздушного колпака внезапное закрытие трубопровода с помощью регулирующей заслонки вызывало выравнивание скорости около положения равновесия в форме колебаний, при определенной величине воздушного колпака такие колебания больше не замечались. Давление асимптотически изменялось от начального до конечного значения. Это явление объясняет, почему у турбины с ро-

стом нагнетательного колпака колебания уменьшаются и, наконец, совсем уничтожаются. Цифровая обработка материала за недостатком времени еще не произведена; как можно видеть, она отнюдь не проста.

Исследование показало также, что уменьшение веса вращающихся масс возможно лишь до определенных пределов, ниже которых никакое увеличение объема воздуха пользы не приносит. Причина этих явлений может заключаться лишь в том, что вопреки предположениям, сделанным в первой части данного исследования,

1) регулятор всегда имеет массу, т. е. обладает инерцией, которой нельзя пренебрегать;

2) сервомотор действует не мгновенно;

3) нагнетательный колпак не расположен непосредственно рядом с направляющим аппаратом.

Автор попытался поэтому численно определить влияние указанных факторов и пришел к результатам, которые, как необходимо отметить, были блестяще подтверждены опытами.

Турбина была снабжена легким, быстро вращающимся пружинным регулятором, применяемым фирмой Эшер-Висс и К° уже на протяжении ряда лет, масса которого раз в десять меньше массы регулятора с грузом, и поэтому вначале кажется допустимым ею пренебречь. Еще Вышнеградский в ранее упомянутой работе выяснил, что инерция массы регулятора должна компенсироваться катарактом;[1] поэтому можно было ожидать также и в данном случае, несмотря на наличие трубопровода и нагнетательного колпака, аналогичных результатов. Это предположение было проверено вычислениями и экспериментом. После того как регулятор снабдили катарактом, *стало действительно возможным уменьшить приведенную вращающуюся массу до минимума, т. е. до массы рабочего колеса турбины.*

Можно показать, что масляный катаракт не только необходим для уравновешивания инерционных сил, но и в

случае идеального регулятора является лучшим средством для уменьшения колебаний, а поэтому представляет известную противоположность „медленно действующему сервомотору“, от которого надеялись получить подобного рода результат непосредственно.

В последующем предполагается, что первая часть данной работы является известной и сохраняются введенные раньше обозначения.

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. Под влиянием перестановочной силы, вызванной изменением скорости, масса регулятора приобретает скорость и тем самым живую силу, благодаря которой она выходит из положения равновесия.

В качестве регулятора здесь можно предположить любой автоматический механизм, имеющий массу, который вращается около оси и подвержен при этом влиянию тяжести, центробежной силы и некоторым внутренним силам. Его равновесие устойчиво в пределах рассматриваемых отклонений. Обозначим через:

m — произвольную малую массу частицы регулятора;

y — расстояние частицы от оси;

ω_0 — угловую скорость вращения около оси;

$F = my\,\omega_0^2$ — центробежную силу, действующую на частицу;

$F' = my\,(\omega_0 + \Delta\omega)^2$ — центробежную силу, соответствующую измененному значению угловой скорости;

E — перестановочную силу регулятора, т. е. силу, которая должна действовать на определённую точку регулятора, называемую „муфтой“, для того чтобы обеспечить равновесие сил при угловой скорости $\omega_0 + \Delta\omega_0$;

S — силу, которую необходимо приложить в той же точке, но в противоположном направлении, чтобы осуществить равновесие невращающегося регулятора; назовем ее „статической силой муфты“;

s — проекцию смещения от положения равновесия точки приложения силы S на направление S, иначе говоря, ход муфты регулятора.

Предположим, что муфта регулятора совершает бесконечно-малое перемещение δs, и обозначим соответствующую работу

центробежной силы F — через A_F,
центробежной силы F' — через $A_{F'}$,
силы тяжести — через A_G,
внутренних сил — через A_I,
перестановочной силы E — через $-E\delta s$,
статической силы муфты S — через $S\delta s$.

Согласно принципу возможных перемещений, в случае равновесия сумма работ всех указанных сил должна быть равна нулю.

При угловой скорости ω_0 имеется равновесие между центробежной, гравитационной и внутренними силами, так что

$$A_F + A_G + A_I = 0.$$

При угловой скорости $\omega_0 + \Delta\omega$ снова имеет место равновесие между центробежной силой F', гравитационной и внутренними силами, а также перестановочной силой E. Следовательно, $A_{F'} + A_G + A_I - E\delta s = 0$. В состоянии покоя S находится в равновесии с силой тяжести и внутренними силами, так что $A_G + A_I + S\delta s = 0$, откуда $\frac{E}{S} = \frac{A_{F'} - A_F}{A_F}$.

Мы предполагаем здесь $\Delta\omega$ настолько малым, что можем пренебречь его квадратом. Учитывая, что при этом предположении A_F и $A_{F'}$ можно отнести к одной и той же конфигурации регулятора, имеем:

$$\frac{E}{S} = \frac{(\omega_0 + \Delta\omega)^2 - \omega_0^2}{\omega_0^2} = 2\frac{\Delta\omega}{\omega_0}$$

и так как ω пропорционально v, то

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = \frac{v - v_0}{v_0} = x,$$

откуда окончательно

$$E = 2\,Sx \tag{59}$$

или *перестановочная сила регулятора есть произведение из статической силы муфты и удвоенного относительного изменения скорости.*

Это правило, насколько это известно автору, впервые было получено Лангом, но только для случая маятникового регулятора.

2. Положение муфты регулятора при равновесии является функцией скорости машины, и наоборот:

$$v = \Phi(s).$$

Если исходить из начального состояния v_0 и s_0 и при постоянном s_0 увеличить скорость v_0 на Δv, то на муфте регулятора возникнет перестановочная сила

$$E_v = 2\,Sx.$$

Если, с другой стороны, сохранить v_0 постоянным и сместить муфту на Δs, то возникнет перестановочная сила E_s такой же величины, как и в случае, когда муфта находится в положении $s_0 + \Delta s$, а равновесная скорость уменьшается от $v_0 + \Delta v$ до v_0, т. е. согласно равенству (59)

$$E_s = 2\,(s + \Delta s)\,\frac{v_0 - (v_0 + \Delta v_0)}{v_0 + \Delta v}$$

и при пренебрежении малыми второго порядка

$$E_s = -2S\frac{\Delta v}{v_0} = -2S\left(\frac{\Delta v}{\Delta s}\right)\frac{s_r}{v_0}\frac{\Delta s}{s_r}.$$

Для очень малых изменений переменных, что здесь и предполагается, $\Delta v : \Delta s = dv : ds = d\Phi : ds$. Положим далее

$$\frac{s_r}{v_0}\frac{d\Phi}{ds} = \delta_0 \tag{60}$$

и назовем δ_0 *неравномерностью в точке* s_0, v_0. Если между s и v существует линейная зависимость, то δ_0 представляет собой полную неравномерность, т. е. $\frac{v_{max} - v_{min}}{v_0}$. Помимо этого, введем новую переменную w' при помощи соотношения

$$w' = \frac{\Delta s}{s_r} = \frac{s - s_0}{s_r}, \tag{60a}$$

где, как и до сих пор, s_r обозначает полный ход муфты регулятора.

Если одновременно v_0 меняется на Δv и s_0 — на Δs от положения равновесия s_0 и v_0, то на муфте возникает перестановочная сила E, которая с той же степенью приближения, какая допускалась нами до сих пор, равна алгебраической сумме E_s и E_v:

$$E = E_s + E_v = 2S\frac{\Delta v}{v_0} - 2S\delta_0\frac{\Delta s}{s_r}$$

или

$$E = 2S(x - \delta_0 w'). \tag{61}$$

Примем также, что на муфту регулятора действует катаракт и, следовательно, прикладывает к ней силу B. Под B можно подразумевать также прочие силы сопротивления, ибо законы их изменения совпадают с аналогичными законами для сопротивления катаракта.[2]

3. Что касается относительного движения регулятора около оси, то за элемент времени dt, т. е. на пути ds, над массой регулятора совершается работа $+Eds$, равная сумме работ центробежной, гравитационной и внутренних сил, и $-Bds$ — работа сил торможения, отрицательная по своей природе.

Сумма этих работ равна изменению живой силы относительного движения, т. е. $\sum mv_r dv_r$, если обозначить через v_r относительную скорость частицы с массой m.

Обозначим через m_r приведенную к муфте массу регулятора, через $v_h = \frac{ds}{dt}$ — скорость муфты. Тогда

$$m_r v_h^2 = \sum m\, v_r^2. \qquad (61а)$$

В общем случае m_r изменяется с изменением величины s, однако мы будем предполагать ее постоянной. Тогда уравнение живой силы будет:

$$\sum mv_r dv_r = m_r v_h dv_h = (E - B)ds \text{ или } m_r \frac{d^2s}{dt^2} = E - B.$$

Это уравнение в совокупности с другими уравнениями, о которых будет итти речь дальше, может быть проинтегрировано лишь в предположении, что сопротивление катаракта в каждый данный момент пропорционально скорости муфты,[3] т. е. что

$$B = K\frac{ds}{dt}. \qquad (61б)$$

Опыты автора с катарактом диаметром 50 мм и ходом поршня 150 мм, в котором 5-мм отверстие регулировалось при помощи конуса, дали следующие результаты:

нагрузка	5	10	20 кг
отверстие 9.4 мм², скорость	4	8	17 мм/сек
» 19.0 » »	16	33	66 »

Катаракт был наполнен обычным оливковым маслом. Из приведенных цифр видно, что в случае масляного катаракта нагрузка и скорость на самом деле почти пропорциональны друг другу.

Введя в уравнение живых сил переменную w', будем иметь:

$$m_r s_r \frac{d^2 w'}{dt^2} = 2S(x - \delta_0 w') - K s_r \frac{dw'}{dt};$$

разделив на $2S$ и обозначая

$$T^2 = \frac{m_r s_r}{2S}, \quad T' = \frac{K s_r}{2S}, \tag{62}$$

получим:

$$T^2 \frac{d^2 w'}{dt^2} + T' \frac{dw'}{dt} + \delta_0 w' - x = 0. \tag{62a}$$

Коэффициенты T и T' имеют размерность времени; при этом T играет роль меры отношения массы регулятора к „энергии“ регулятора, а T' — меры отношения коэффициента сопротивления катаракта к „энергии“ регулятора.

4. Регулятор снабжен медленно действующим сервомотором. Здесь применимы формулы (30) — (33) первой части, со следующими небольшими видоизменениями.

Переменная w должна быть представлена при помощи уравнения

$$\frac{s' - s_0}{s_r} = \frac{1}{\delta_0} w. \tag{63}$$

Тогда

$$\frac{ds'}{dt} = \sigma_0 \frac{s - s'}{s_r} = \sigma_0 \left[\frac{s - s_0}{s_r} + \frac{s_0 - s'}{s_r}\right] = \sigma_0 \left[w' - \frac{1}{\delta_0} w\right]. \tag{63a}$$

Обозначая $T_0 = \frac{s_r}{\sigma_0}$, получим уравнение движения:

$$T_0 \frac{dw}{dt} + w - \delta_0 w' = 0. \tag{64}$$

5. Движение рабочего колеса турбины рассматривается аналогично тому, как и в разделе 2, в случае „медленно действующего сервомотора". Тогда действует второе уравнение из группы уравнений (35)

$$T_1 \frac{dx}{dt} + \alpha_0 w + x - \frac{3}{2} z = \Pi. \tag{65}$$

6. Между направляющим аппаратом и воздушным колпаком находится трубопровод, для которого введем обозначения:

L' — длина;

F' — постоянное поперечное сечение;

d' — постоянный диаметр;

p — избыточное давление в направляющем сопле;

p' — избыточное давление в воздушном колпаке;

c' — скорость;

p_0, p_0', c_0' — начальные значения для p, p' и c';

$z' = (p' - p_0) : p_0$ — изменения давления в воздушном колпаке в долях p_0';

$\zeta' \frac{L'}{d'} \frac{c'^2}{2g}$ — потеря напора из-за трения, кривизны и пр.

Предполагается, что уровень воды в воздушном колпаке находится на одной высоте с устьем колеса турбины. Уравнение живой силы, примененное к отрезку трубы длиной L' (ограниченному направляющим аппаратом), дает:

$$T_2' \frac{dy'}{dt} = z' - z - \varepsilon' y',$$

где

$$T_2' = \frac{L'}{h_0} \frac{c_0'}{g} \; ; \quad \varepsilon' = \left(1 - \zeta' \frac{L'}{d'}\right) \frac{c_0'^2}{h_0 g}. \tag{66}$$

7. Уравнение, устанавливающее, что расход из воздушного колпака равен сумме притока и увеличения объема воздуха, дает

$$Fc + F \frac{dl}{dt} = F'c'$$

(предполагается, что $Fc_0 = F'c'_0$). Введя переменные z, y и y', получим:

$$T_3 \frac{dz'}{dt} = y - y',$$

где

$$T_3 = \frac{l_0}{c_0} \frac{p_0}{p'_0 + p_a}. \tag{67}$$

8. Для движения столба воды имеем, как в первой части,

$$T_2 \frac{dy}{dt} + \varepsilon y + z' = 0.$$

9. Уравнение неразрывности утверждает, что в состоянии равновесия приток и расход равны друг другу, и дает $fu = F'c'$, откуда, пренебрегая малыми величинами второго порядка, получим:

$$\alpha_0 w + y' - \frac{1}{2} z = 0. \tag{68}$$

10. Семь уравнений, полученных в § 1—9, достаточны, чтобы с помощью начальных условий определить семь переменных w', w, x, y, z, z' и y'. Система этих уравнений имеет вид:

$$\left.\begin{aligned}
&T^2 \frac{d^2 w'}{dt^2} + T' \frac{dw'}{dt} + \delta_0 w' - x = 0,\\
&T_0 \frac{dw}{dt} + w - \delta_0 w' = 0,\\
&T_1 \frac{dx}{dt} + \alpha_0 w + x - \frac{3}{2} z = \Pi,\\
&T'_2 \frac{dy'}{dt} + \varepsilon' y' - z' + z = 0,\\
&T_2 \frac{dy}{dt} + \varepsilon y + z' = 0,
\end{aligned}\right\} \tag{69}$$

$$\left.\begin{aligned} T_3 \frac{dz'}{dt} + y' - y = 0, \\ \alpha_0 w + y' - \frac{1}{2} z = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (69)$$

11. Интегрирование этой системы уравнений может быть осуществлено по известной схеме, которая применялась неоднократно в первой части этой работы. Эта схема приводит, однако, к характеристическому уравнению 7-й степени, о решении которого в общем случае, как и об явном представлении функций w, w', ..., не может быть и речи. Поэтому было бы очень важно иметь возможность устанавливать хотя бы характер корней, прежде всего знаки их действительных частей. Если мы назовем для краткости комплексные корни по признаку этих знаков положительными или отрицательными, то можно сказать, что одного единственного положительного корня достаточно, чтобы переменные росли выше всяких границ, т. е. чтобы амплитуда колебаний стремилась к бесконечности. Здесь также должно выполняться требование, чтобы характеристическое уравнение имело только отрицательные корни.

До сих пор алгебра не была в состоянии дать ответ на вопрос, при каких условиях это требование будет удовлетворено.[4] Проф. Гурвиц проявил исключительную любезность, заинтересовавшись этой проблемой, и разработал весьма элегантные правила, приводимые с его разрешения ниже. Обоснование этих правил будет опубликовано в „Mathematischen Annalen".[5]

Пусть имеется уравнение n-й степени с действительными коэффициентами

$$c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \dots + c_n = 0$$

и пусть $c_0 > 0$. Условия того, что все корни этого уравнения имеют отрицательные действительные части, будут следующими:

1) все коэффициенты уравнения должны быть больше 0;
2) все $n-2$ детерминантов, образованных по схеме

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} c_1, & c_3, & c_5, & c_7 & \ldots & c_{2k-1} \\ c_0, & c_2, & c_4, & c_6 & \ldots & c_{2k-2} \\ 0, & c_1, & c_3, & c_5 & \ldots & c_{2k-3} \\ 0, & c_0, & c_2, & c_4 & \ldots & c_{2k-4} \\ 0, & 0, & c_1, & c_3 & \ldots & c_{2k-5} \\ 0, & 0, & c_0, & c_2 & \ldots & c_{2k-6} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0, & 0, & 0 & \ldots & c_k \end{vmatrix} \qquad (70)$$

где k последовательно принимает значения $2, 3, 4 \ldots (n-1)$, должны иметь положительные значения. Коэффициенты c_{n+1}, $c_{n+2}, \ldots = 0$.

Закон образования детерминантов легко подметить, если сравнить друг с другом строки 1, 3, 5, а затем 2, 4, 6 ... Теперь мы в состоянии узнать, взяв любую систему значений T, T', $T_0 \ldots$ и составив, при помощи коэффициентов характеристического уравнения, соответствующие детерминанты Гурвица, будут ли в данном частном случае все корни характеристического уравнения иметь отрицательные действительные части. В этом смысле проблема полностью разрешена.

Ввиду малого опыта в настоящее время в отношении автоматического регулирования турбин высокого давления было бы очень важно уметь составлять общие соотношения между коэффициентами T, T', ..., которые позволили бы заранее определять эти величины так, чтобы характеристическое уравнение не имело положительных корней. Так как, однако, уже коэффициенты характеристического уравнения представляют собой довольно сложные выражения, образованные из постоянных T, T', ..., то является крайне затруднительным в еще более сложных детерминантных выражениях установить влияние каждой из величин T, T', ... в отдельности.

Некоторые выводы удается сделать, если свести общую задачу к отдельным частным случаям, для чего следует отдельные коэффициенты T, T', ... полагать равными нулю. Важно заметить, что этот предельный переход вполне допустим.

Упрощение начнем с того, что примем $T_2'=0$, $\varepsilon'=0$. Тогда можно будет исключить z' и y' и получить:

$$\left.\begin{aligned}
&T^2\frac{d^2w'}{dt^2}+T'\frac{dw'}{dt}+\delta_0 w'-x=0,\\
&T_0\frac{dw}{dt}+w-\delta_0 w'=0,\\
&T_1\frac{dx}{dt}+\alpha_0 w+x-\frac{3}{2}z=\Pi,\\
&T_2\frac{dy}{dt}+\varepsilon y+z=0,\\
&T_3\frac{dz}{dt}-\alpha_0 w-y+\frac{1}{2}z=0.
\end{aligned}\right\}\qquad(71)$$

12. Имеет смысл еще раз вернуться к механическому смыслу коэффициентов T_1, T_2, T_3, ε. Коэффициенты T, T', T_0 были уже определены раньше. Назовем для краткости T массой регулятора, T' — катарактом, а T_0 — временем сервомотора. Пусть

$$\frac{1}{\psi}=\frac{f_0}{f_1},\qquad(72)$$

где f_0 обозначает поперечное сечение направляющего канала в начальный момент, f_1 — то же самое при полном открытии, и назовем $\frac{1}{\psi}$ *фактором нагрузки*, так как нагрузка пропорциональна этой величине. Ввиду того, что при холостом ходе по меньшей мере 2—5% поперечного сечения направляющего канала f_1 остается открытым, величина ψ изменяется

в пределах между 1 и 20—50. Введенная в первой части величина α_0, определенная как мера астатичности, согласно формуле (16), равна

$$\alpha_0 = \frac{f_1}{f_0}\frac{1}{\delta_0} = \frac{\psi}{\delta_0}. \tag{73}$$

Так как

$$T_1 = \frac{Mv_0}{P_0} = 2\left[\frac{1}{2}Mv_0^2\right] : P_0 v_0,$$

то из этого выражения следует, что $\frac{1}{2}T_1$ *есть отношение живой силы вращающейся массы к эффективной мощности.*

Выше мы имели

$$T_2 = Lc_0 : h_0 g = 2\left[\frac{1}{2}M_L c_0^2\right] : [\gamma V_0 h_0].$$

Здесь M_L означает массу воды во всем трубопроводе, V_0 — секундный объемный расход воды; следовательно, $\gamma V_0 h_0$ представляет собой ту мощность, которой мы располагаем непосредственно перед соплом и которую мы назовем для краткости *абсолютной мощностью.* Тогда получим определение: $\frac{1}{2}T_2$ *есть отношение „энергии трубопровода" к абсолютной мощности.*

Далее $T_3 = l_0 p_0 : c_0 (p_0 + p_a)$. При больших напорах можно пренебречь p_a по сравнению с p_0 и написать:

$$T_3 = (Fl_0 p_0) : (Fc_0 p_0) = Wp_0 : \gamma V_0 h_0;$$

здесь Wp_0 — энергия аккумулятора постоянного давления с объемом, равным объему воздушного колпака. Можно сказать, что T_3 *есть отношение энергии аккумулятора постоянного давления, эквивалентного воздушному колпаку, к абсолютной мощности.* Наконец,

$$\varepsilon = 2\left[\zeta_r \frac{L}{d}\frac{c_0^2}{2g}\right] : h_0.$$

Выражение в скобках, согласно терминологии, принятой в гидравлике, означает потерянный напор; h_0 — высота полезного напора, так что $\frac{1}{2}\varepsilon$ означает отношение *потерянного напора к полезному напору в трубопроводе*. Коэффициенты T_1, T_2, T_3, ε меняют свое значение с изменением нагрузки турбины. Пусть T_{1m}, T_{2m}, T_{3m}, ε_m, c_m, P_m представляют собой значения T_1, T_2, T_3, ε, c, P, соответствующие полной нагрузке.

Приближенно можно считать мощность турбины пропорциональной сечению направляющего канала и пренебречь малыми отличиями окружной скорости из-за малости δ_0. Тогда получим

$$P_0 = P_m \frac{f_0}{f_1} = P_m \frac{1}{\psi};$$

$$c_0 = c_m \frac{f_0}{f_1} = c_m \frac{1}{\psi};$$

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= \frac{M\varphi_0}{P_m}\psi = \psi T_{1m}; \quad T_2 = \frac{L}{h_0}\frac{c_m}{g}\frac{1}{\psi} = \frac{1}{\psi}T_{2m}; \\ T_3 &= \frac{l_0}{c_m}\frac{p_0}{p_0+p_a}\psi = \psi T_{3m}; \quad \varepsilon = \frac{\zeta_r}{g}\frac{L}{h_0}\frac{c_m^2}{d_0}\frac{1}{\psi^2} = \frac{1}{\psi^2}\varepsilon_m. \end{aligned}\right\} \quad (74)$$

13. Подстановка $w' = \omega_0' + m'e^{\varphi t}$, $w = \omega_0 + me^{\varphi t}$, $x = \xi_0 + ae^{\varphi t}$ и т. д. (где величины ω_0', ω, $\xi_0 \dots$ определены надлежащим образом) в уравнения (71) приводит к следующему характеристическому уравнению:

$$a''\varphi^6 + a'\varphi^5 + a\varphi^4 + b\varphi^3 + c\varphi^2 + d\varphi + e = 0. \quad (75)$$

Здесь введены обозначения:

$$\left.\begin{aligned} a'' &= T^2 T_0 T_1 T_2 T_3; \quad a' = jm + bp; \\ a &= km + jn + hp; \quad b = lm + kn + jp; \\ c &= qm + ln + kp; \quad d = lp + q^{\varepsilon} T_3 - q' T_2; \\ e &= \psi(1-\varepsilon) + \delta_0 p; \end{aligned}\right\} \quad (76)$$

$$\left.\begin{aligned} &h = T^2 T_0 T_1; \; j = T^2 (T_0 + T_1) + T' T_0 T_1; \\ &k = T^2 + T' (T_0 + T_1) + \delta_0 T_0 T_1; l = T' + \delta_0 (T_0 + T_1); \\ &m = T_2 T_3; \qquad n = \frac{1}{2} T_2 + \varepsilon T_3; \\ &p = 1 + \frac{\varepsilon}{2}; \quad q = \psi + \delta_0; \quad q' = \psi - \frac{\delta_0}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{76}$$

Эти выражения прежде всего показывают, что коэффициенты a'', a', ... e, являются однородными функциями постоянных T, T', T_0, ... и их степень совпадает с соответствующей степенью φ. Поэтому характеристическое уравнение можно записать в форме:

$$\left(\frac{a''}{T_k^6}\right)(T_k\varphi)^6 + \left(\frac{a'}{T_k^5}\right)(T_k\varphi)^5 + \left(\frac{a}{T_k^4}\right)(T_k\varphi)^4 + \ldots + e = 0,$$

где T_k означает одну из величин T, T', ... и $T_k\varphi$ является корнем. В коэффициенты этого уравнения входят лишь отношения $T : T_k$, $T' : T_k$, ... Так как все T положительны, то знак будет совпадать со знаком $T_k\varphi$, и мы получаем правило: *способность турбины к регулированию зависит не от абсолютных величин коэффициентов T, T', ..., но лишь от их отношений между собой.*

Принимая эти отношения за постоянные и считая корни мнимыми (комплексными), получим:

$$T_k\varphi_\lambda = R + iS,$$

откуда

$$\varphi_\lambda = \frac{R}{T_k} + i\frac{S}{T_k} = r + is,$$

где R и S также постоянны. От каждого из этих корней в интеграл функций w', w, ... входит выражение, имеющее форму $e^{rt}[A\cos st + B\sin st]$, а полный интеграл состоит из суммы подобных выражений. Период каждого из этих частных колебаний равен $t_0 = \frac{2\pi}{s} = \frac{2\pi}{S} T_k$. Затухание амплитуды

колебаний зависит от множителя e^{rt_0}, причем показатель степени в последнем $rt_0 = 2\pi R : S$ также является постоянным. Таким образом имеем правило:

если при постоянных соотношениях коэффициентов T, T', ... их абсолютное значение растет, то период колебаний тоже растет, но сходимость колебаний, однако, не меняется.

Если, наконец, вместо времени за независимую переменную выбрать величину $\tau = t : T_k$, то написанный выше частный интеграл будет иметь вид: $e^{R\tau}[A\cos S\tau + B\sin S\tau]$.

Произвольные постоянные определим из начальных условий: при $t = 0$, $w' = w = x = y = z = 0$ и $\frac{dw'}{dt} = 0$. В A и B, помимо произвольных постоянных, содержатся лишь произведения формы $T_k\varphi$, и поскольку последние постоянны, а отношения $T : T'$ ... неизменны, то произвольные постоянные принимают прежние значения.

Переменные w', w, x, ..., рассматриваемые как функции τ, не будут изменяться, если T, T', ... растут или уменьшаются пропорционально. Далее, как следует, например, из уравнения (41б), произвольные постоянные пропорциональны нагрузке Π, так что каждую из переменных, w', w, x, ... можно представить в виде произведения Π на одну из функций τ, зависящую лишь от отношений $T : T'$... (и коэффициентов ε, ψ, δ_0).

Поэтому, если, например, определить максимум скорости, то последний будет иметь одинаковую форму, откуда следует правило:

при пропорциональном увеличении или уменьшении коэффициентов T, T', ... не изменяется отношение максимального отклонения давления и скорости к относительному изменению нагрузки.

Эти правила необходимы для того, чтобы можно было результаты экспериментов с маленькими установками применять к большим, и наоборот.

14. Дальнейшая общая дискуссия с уравнением 6-й степени невозможна, и поэтому мы перейдем к уравнению 4-й степени. Как легко видеть, мы будем иметь уравнение 4-й степени, если одновременно будут равняться нулю два любых из коэффициентов T, T_0, T_1, T_2, T_3 или коэффициенты T и T'.

Характеристическое уравнение тогда примет вид:

$$a\varphi^4 + b\varphi^3 + c\varphi^2 + d\varphi + e = 0,$$

а условия Гурвица будут следующими:

$$\left.\begin{aligned} a>0,\ b>0,\ c>0,\ d>0,\ e>0\,, \\ bc-ad>0,\ (bc-ad)d-b^2e>0. \end{aligned}\right\} \qquad (77)$$

Весьма благоприятным является в данном случае то, что все коэффициенты, за исключением d, а также и детерминант $bc - ad$, положительны. В последнем обстоятельстве легко убедиться, подставляя выражения для a, b, c, d. Значение детерминанта тогда представится в виде суммы — во-первых, ряда положительных членов, во-вторых, ряда выражений вида $p^2(jk - bl) - bnpq + jn\left(\frac{3}{2}\psi T_2 - qn\right)$. В этих выражениях первый член положителен, что следует из подстановки значений j, k, b и l. Второй член всегда равен нулю, так как для уравнения 4-й степени b или n исчезают. Третий член равен $jn\left[\left(\psi - \frac{\delta_0}{2}\right)\frac{T_2}{2} - jnq\varepsilon T_3\right]$, причем первое слагаемое в скобках положительно $\left(\text{ибо всегда } \psi > \frac{\delta_0}{2}\right)$, второе равно нулю, так как j или nT_3 должны исчезнуть.

В качестве остальных условий остаются $d > 0$, $\Delta = (bc - ad)d - b^2e > 0$. Последнее должно быть преобразовано следующим образом. Как ранее было замечено, a является однородной функцией 4-й степени от T, T', $T_0, \ldots$ аналогично b —

однородной функцией 3-й степени тех же величин, c — второй, d — первой и e — нулевой степени, причем T встречается только в квадрате, а прочие величины — только в первой степени.

Поэтому можно положить:

$$\left.\begin{aligned} a &= \left(a_0 + a_1 \frac{T_k}{T_\lambda}\right) T_\lambda^4; \qquad c = \left(c_0 + c_1 \frac{T_k}{T_\lambda}\right) T_\lambda^2; \\ b &= \left(b_0 + b_1 \frac{T_k}{T_\lambda}\right) T_\lambda^3; \qquad d = \left(d_0 + d_1 \frac{T_k}{T_\lambda}\right) T_\lambda^1; \\ e &= \left(e_0 + e_1 \frac{T_k}{T_\lambda}\right) T_\lambda^0. \end{aligned}\right\} \tag{78}$$

Здесь $e_1 = 0$ (оно введено лишь для симметрии), T_k — одна из величин T', T_0, T_1, T_2, T_3, причем в коэффициенты входят только отношения T, T', ... к произвольно выбранному T_λ. Если эти выражения для a, b, c, d ввести в детерминант Δ и использовать символ:

$$\Delta_{k\lambda\mu} = \begin{vmatrix} b_k & d_\lambda & 0 \\ a_k & c_\lambda & e_\mu \\ 0 & b_\lambda & d_\mu \end{vmatrix}, \tag{79}$$

то получим:

$$\left.\begin{aligned} \Delta = A\left(\frac{T_k}{T_\lambda}\right)^2 + B\left(\frac{T_k}{T_\lambda}\right)^2 + C\left(\frac{T_k}{T_\lambda}\right) + D > 0, \\ A = \Delta_{111}, \quad B = \Delta_{011} + \Delta_{101} + \Delta_{110}, \\ C = \Delta_{001} + \Delta_{010} + \Delta_{100}, \quad D = \Delta_{000}. \end{aligned}\right\} \tag{80}$$

где

Если в качестве T_k выбрать T, то получим выражения: $a = \left[a_0 + a_1\left(\frac{T}{T_\lambda}\right)^2\right] T_\lambda^4$ и т. д. и в Δ тогда будут входить 6, 4 и 2-я степени $\frac{T}{T_\lambda}$.

Это упрощение имеет целью дать возможность приступить *к исследованию влияния массы регулятора и катаракта.* Недостаток места не позволяет провести это исследование с полной общностью, поэтому ограничимся наиболее типичными случаями.

I. Регулятор, обладающий массой, маховик, трубопровод, т. е. T, T_1, T_2 и δ_0 больше нуля; прочие величины, включая ε, исчезающе малы. Примем в формулах (78)—(80) для простоты T_2 за T_λ и T_1 за T_k. Пренебрегая δ_0, всегда малым по сравнению с ψ, получим: [6]

$$A = 0;\ B = \psi\left(\frac{T}{T_2}\right)^2\left[-\left(\frac{T}{T_2}\right)^2 + \frac{\delta_0}{2}\right];$$

$$C = -\psi\left(\frac{T}{T_2}\right)^2\left[2\left(\frac{T}{T_2}\right)^2 + \frac{\psi}{2}\right];\ D = -\frac{3}{4}\psi\left(\frac{T}{T_2}\right)^4.$$

Так как C и D имеют существенно отрицательные значения, то $\Delta > 0$ может быть лишь тогда, когда $B > 0$, т. е. когда

$$\left(\frac{T}{T_2}\right)^2 < \frac{\delta_0}{2}. \tag{81}$$

Предельному значению $T^2 : T_2^2 = \frac{1}{2}\delta_0$ соответствует $T_1 = \infty$,

поэтому мы имеем правило:

регулятор без трения и катаракта, в случае закрытой турбины, будет регулировать без возрастающих колебаний только тогда, когда отношение его массы к его „энергии“ не превосходит определенного значения; астатический регулятор в этом случае неприменим (так как для него $\delta_0 = 0$).

II. Регулятор, обладающий массой, маховик, медленно действующий сервомотор, т. е. T_0, T_1 и T больше нуля, остальные величины равны нулю. Формулы (78)—(80) дают при $T_\lambda = T_1$ и $T_0 = T_k$: [7]

$$A = 0; \qquad B = a_1^2(c_1 - e_0);$$
$$C = 2a_1^2(c_1 - e_0); \qquad D = a_1^2(c_1 - e_0).$$

Поскольку

$$\Delta = a_1^2(c_1 - e_0)\left[\frac{T_0}{T_1} + 1\right]^2 > 0,$$

то, следовательно,

$$c_1 - e_0 = -\psi(1 - \varepsilon) > 0.$$

Последнее неравенство, однако, невозможно, так как ε всегда меньше единицы. При значении $\varepsilon = 1$ отношение „потерянного" напора к полезному равно $^1/_2$ и при этом значении, как легко убедиться, работоспособность вытекающей жидкости максимальна.

Если бы сопло, через которое жидкость вытекает, могло расширяться так, что ε было бы больше единицы, то осуществлялось бы обратное регулирование, т. е. опускание муфты регулятора приводило бы к падению мощности.

Мы можем поэтому сделать следующий вывод:

вредное действие массы рогулятора не может быть компенсировано только замедлением движения сервомотора и изменением приведенной вращающейся массы турбины.

III. Регулятор, обладающий массой, катаракт, маховик, т. е. T, T' и T_1 больше нуля, $T_0 = T_2 = T_3 = \varepsilon = 0$.[8] Характеристическое уравнение дает:

$$T^2 T_1 \varphi^3 + [T^2 + T_1 T'] \varphi^2 + [T' + \delta_0 T_1] \varphi + (\psi + \delta) = 0.$$

Условие отрицательности корней:

$$\delta_0 T' T_1^2 + [T'^2 - \psi T^2] T_1 + T' T^2 > 0.$$

Введя $T_{1m} = \psi T_1$, получим:

$$\delta_0 T' \psi T_{1m}^2 + [T'^2 - \psi T^2] T_{1m} + \frac{1}{\psi} T' T^2 > 0. \qquad (82)$$

Отсюда следует, поскольку $T'^2 - \psi T^2 < 0$, что T_{1m} имеет два предельных значения T'_{1m}, T''_{1m}, из которых одно в общем

случае так мало, что для практики оно не имеет значения. и в качестве условия остается:

$$T_{1m} > \frac{1}{2\delta_0 T'} \left\{ \left(T^2 - \frac{1}{\psi} T'^2\right) + \sqrt{\left(T^2 - \frac{1}{\psi} T'^2\right)^2 - 4 \frac{\delta_0}{\psi^2} T'^2 T^2} \right\}$$

или приближенно, ввиду малости δ_0 и для $\psi = \infty$, в пределе

$$T_{1m} > \frac{T_3}{\delta_0 T'} . \tag{83}$$

Так как T всегда является маленькой дробью, то вычисленная соответственно с этим выражением вращающаяся масса в общем невелика.

Неравенство (82) можно разрешить относительно T', и мы получим:

$$T' > \frac{1}{2T_1} \left\{ -(\delta_0 T_1^2 + T^2) + \sqrt{(\delta_0 T_1^2 + T^2) + 4\psi T^2 T_1^2} \right\}.$$

Замечательно то, что здесь может быть сделан переход к значению $\delta_0 = 0$, т. е. к случаю *астатического регулятора*, и что T' при этом изменяется весьма мало. [9] Пусть $\delta_0 = 0$, и так как T малая дробь, то приближенно

$$T' > T\sqrt{\psi} . \tag{84}$$

Сравнивая это значение с равенством (72), легко убедиться, что последнее соотношение одновременно будет удовлетворено при каждом положительном T_1; иначе, *когда катаракт удовлетворяет соотношению $T' > T\sqrt{\psi}$, то для регулирования в интервале от 1 до 1 : ψ можно произвольно уменьшить вращающуюся массу и превратить регулятор в астатический.*

Это правило находится лишь в видимом противоречии с формулой (83), дающей для $\delta_0 = 0$ величину $T_{1m} = \infty$, так как последняя, как специально было отмечено, относится лишь к случаю, когда $T' < T\sqrt{\psi}$.

Для того чтобы в этом случае действительно можно было работать с астатическим регулятором, для ψ надо выбрать значения, соответствующие холостому ходу.

Важность катаракта особо подчеркивалась Вышнеградским в указанном выше сочинении, которое во многом лежало в основе развитых здесь рассуждений.[10]

Рассмотренные частные случаи показали, что в случае закрытой турбины влияние массы регулятора известным образом может быть компенсировано при помощи махового колеса. Такой компенсации совершенно невозможно достигнуть замедлением движения сервомотора, и, наоборот, вполне возможно с помощью катаракта.

IV. Катаракт при исчезающе малой массе регулятора. Исследование этого случая приводит к поразительному результату, что в комбинации с идеальным регулятором катаракт и „медленно действующий сервомотор" друг другу полностью эквивалентны. Для того чтобы убедиться в этом, сопоставим между собой два частных случая: T', T_1, T_2, T_3 больше 0, $T = T_0 = 0$ и T_0, T_1, T_2, T_3 больше 0, $T = T' = 0$. Первое предположение дает в системе (71): $w - \delta_0 w' = 0$, так что уравнения принимают вид:

$$\frac{T'}{\delta_0}\frac{dw}{dt} + w - x = 0, \quad T_1\frac{dx}{dt} + \alpha_0 w + x - \frac{3}{2}z = \Pi, \ldots\ldots$$

Второе предположение дает $\delta_0 w' - x = 0$, следовательно,

$$T_0\frac{dw}{dt} + w - x = 0; \quad T_1\frac{dx}{dt} + \alpha_0 w + x - \frac{3}{2}z = \Pi, \ldots\ldots$$

Если положить

$$T_0 = \frac{T'}{\delta_0}, \tag{85}$$

то обе системы будут тождественными. Отсюда вытекает правило:

в предельном случае исчезающе малой массы регулятора

катаракт по своему действию эквивалентен „медленно действующему сервомотору“ с продолжительностью регулирования $T_0 = T' : \delta_0$.

Поэтому все, что было сказано о медленно действующем сервомоторе в первой части данной работы, в рассматриваемом предельном случае может быть отнесено и к катаракту, если только T_0 заменить через $T' : \delta_0$.

V. Идеальный (т. е. не имеющий массы) регулятор, катаракт, маховое колесо и трубопровод, т. е. T', T_1 и T_2 больше нуля, $T = T_0 = T_2 = \varepsilon = 0$.[11]

Характеристическое уравнение получим из уравнения (37) заменой T_0 на T': δ_0. Будем иметь:

$$T'T_1T_2\varphi^3 + [2T'T_1 + T'T_2 + \delta_0 T_1 T_2]\varphi^2 + 2[T' + \delta_0 T_1 - \\ - \psi T_2]\varphi + 2\psi = 0.$$

Условие отрицательности корней будет следующим:

$$F(T_1) = \delta_0[2T' + \delta_0 T_2]T_1^2 + [(2T' + \delta_0 T_2)(T' - \psi T_2) - \\ - (\psi - \delta_0)T'T_2]T_1 + T'T_2(T' - \psi T_1) > 0.$$

При соответствующем выборе T' можно сделать детерминант уравнения $F(T_1) = 0$ отрицательным, так что неравенство $F(T_1) > 0$ будет выполнено для каждого положительного T_1. Соответствующие вычисления несколько сложны, поэтому мы ограничимся тем, что установим границы, вне которых все коэффициенты в $F(T_1)$ положительны, тогда тем более допустимо каждое положительное T_1. Ввиду малости δ_0 эта граница приближенно достигается в том случае, когда $T' > \frac{3}{2}\psi T_2$, или при введении $T_2 = \frac{1}{2} T_{2m}$, когда

$$T > \frac{3}{2} T_{2m}. \quad (86)$$

Таким образом приходим к результату:

в случае идеального регулятора также и у закрытой турбины (с произвольно длинным трубопроводом) вращающаяся масса может быть уменьшена до нуля при соответствующем увеличении сопротивления катаракта.

Регулятор должен при этом приближаться к полной астатичности.

Необходимо также заметить, что это правило пригодно и в случае конечной массы регулятора, не следует только упускать из виду рост колебаний скорости в связи с усилением торможения.

Если бы аналогичный результат хотели получить при помощи замедления сервомотора, то в силу того, что $T_0 = T':\delta$, потребовалось бы при астатическом регуляторе бесконечно большое T_0, так как T' конечно и притом достаточно мало.

VI. Общий случай. В общем случае очень затруднительно дать наглядную картину связи всей совокупности переменных T, T',... Если рассматривать три из них как постоянные, а остальные три как прямоугольные координаты точки в некотором пространстве, то соответствующая система значений последних образует поверхность, которая обладает тем свойством, что для точек с одной ее стороны регулирование возможно, а для точек с другой ее стороны — невозможно. [12]

Автор рассчитал ряд примеров и убедился, что можно составить удовлетворительное представление о форме этих поверхностей при помощи вычерчивания кривых, которые они порождают при пересечении с координатными плоскостями. Но такие кривые пересечения в значительной своей части как раз соответствуют тем частным случаям, которые были ранее рассмотрены. Поэтому можно считать, что вся проблема этими частными случаями выяснена в такой степени, что нижеследующие общие выводы являются обоснованными.

ВЫВОДЫ

Решающим является требование надежности в эксплоатации, т. е. требование отсутствия нарастающих колебаний. Допустимый максимум скорости для разных установок оценивается различно и эта оценка является самостоятельной проблемой. Коротко выводы из теоретических расчетов и экспериментальных исследований могут быть сформулированы следующим образом:

1. Решающий успех в отношении устойчивости регулирования (т. е. в отношении наличия лишь затухающих до нуля колебаний) достигается путем увеличения сопротивления катаракта. На практике рекомендуется устанавливать небольшой тормозной цилиндр с большим отверстием в поршне (чтобы предотвратить засорение) и достигать необходимой величины сопротивления за счет большого хода поршня, т. е. за счет большой скорости.

2. Инерция массы регулятора во всех случаях действует вредно и, начиная с некоторой определенной величины, эта масса не может быть компенсирована ни маховиком, ни воздушным колпаком, ни уменьшением скорости сервомотора, а только лишь с помощью тормоза. Этот тормоз не обязательно должен быть обычным катарактом (этот последний имеет лишь то преимущество, что его поведение весьма точно отвечает предположениям, положенным в основу расчетов). Очевидно, что какая-нибудь другая форма торможения должна оказывать то же самое действие. Таким образом для регуляторов, не имеющих особых тормозящих приспособлений, роль катаракта играет собственное трение регулятора и сопротивления перестановочных устройств.[13]

3. Математическое исследование показывает, что „медленнодействующий сервомотор“ (в том смысле, в котором это название здесь употребляется) в сочетании с регулятором, обладающим массой и катарактом, ведет себя весьма своеобразно. Именно — при большой скорости (малом запаздывании) он влияет

весьма неблагоприятно; при малой скорости (большом запаздывании), наоборот, благоприятно.

4. Катаракт (тормоз) и малая скорость сервомотора — при заданном внезапном изменении нагрузки — вызывают увеличение максимального отклонения скорости во время переходного процесса. Поэтому их следует рассматривать только как неизбежное зло.

5. Достаточно большой воздушный колпак в сочетании с идеальным регулятором является лучшим средством, чтобы избежать появления нарастающих колебаний. Такой колпак не является причиной отдачи мощности на трение, в противоположность тяжелым маховикам. Его размеры могут быть легко выбраны таким образом, что даже при внезапном закрытии трубопровода в момент работы турбины на полную мощность увеличение давления не превысит заданной величины. Однако воздушный колпак сам по себе не может компенсировать инерцию массы регулятора и должен употребляться лишь вместе с катарактом.

6. Катаракт и воздушный колпак не зависят от степени астатичности регулятора. Это обстоятельство тем более следует подчеркнуть, что, как было показано, в случаях маховика (если он один используется в качестве средства против неустойчивости регулирования) его момент инерции должен находиться в обратном отношении к неравномерности регулятора.

7. Нет надобности отмечать благоприятное действие маховика или вообще приведенной вращающейся массы. Такая масса всегда должна быть налицо, так как иначе максимум отклонений скорости во время переходного процесса будет слишком большим. [14]

Предвычисление такого максимума отклонений скорости слишком громоздко для того, чтобы его можно было предпринимать во всех случаях. Для отыскания первого приближения при большом воздушном колпаке может служить формула (49).

Однако ввиду того, что ее вывод основывается на предположении об идеальном регуляторе, необходимо ввести в нее поправочный коэффициент, величину которого должна дать практика. Аналогичные замечания имеют силу и в отношении большинства полученных здесь количественных соотношений. Найденные результаты наиболее отвечают действительным соотношениям, если мы имеем регулятор, обладающий призматическими сочленениями, который почти лишен трения, и гидравлический сервомотор с коротким ходом и большим диаметром управляющих каналов, который действует почти моментально. Нечувствительность обычного генератора дает, несомненно, такой же эффект, как и катаракт; однако в отношении числового коэффициента, характеризующего такой катаракт, приходится прибегать к произвольной оценке. Примерно таким же образом поступают, как уже ранее указывалось, с сервомотором. В то время как в настоящем исследовании скорость сервомотора была принята пропорциональной разности между ходом поршня сервомотора и ходом регулятора, в действительности эта скорость у большинства сервомоторов, в частности во всех сцепных механизмах, постоянна. Наконец, искажающее действие вносят мертвые хода в сочленениях и случайные защемления.[15]

Если таким образом полученные количественные соотношения не могут быть использованы для всех применяющихся регулирующих механизмов, то автор все же полагает, что принципиальная сторона регулирования им вполне выяснена и что тем самым проблема регулирования может считаться решенной.

Настоящее исследование, в частности, показывает, что даже в труднейших случаях, т. е. при исключительно длинных трубопроводах и самых жестких условиях в отношении допускаемых эксплоатацией изменений скорости, регулирование может быть осуществлено весьма простыми средствами. Здесь не нужно искать спасения в использовании сложных механизмов (основы

действия которых во многих случаях далеко не ясны). Необходимость прямого соподчинения положения муфты регулятора и величины поперечного сечения направляющего сопла при помощи сервомотора какого-либо типа в настоящее время общепризнана и упоминается здесь лишь мимоходом. Неприменимость систем регулирования, где нет такого прямого соподчинения, давно выяснена практикой и наукой. В очень ясной форме этот вопрос изложен, например, у Грасгофа в его книге „Теоретическое учение о машинах". Не касаясь этого вопроса, можно сжато сформулировать следующие основные положения, на которых должно базироваться рациональное конструирование регулирующих устройств:

1) уменьшение массы регулятора,
2) катаракт (в случае надобности — астатичность),
3) быстродействующий (насколько возможно) сервомотор,
4) воздушный колпак или маховик.

Если величина колебаний скорости при изменениях нагрузки несущественна, то достаточно одного простого, но сравнительно сильного катаракта.

АУРЕЛЬ СТОДОЛА



ПРИНЦИП РЕГУЛИРОВАНИЯ СИМЕНСОВ И АМЕРИКАНСКИЕ ИНЕРЦИОННЫЕ РЕГУЛЯТОРЫ



Проф. А. СТОДОЛА

ПРИНЦИП РЕГУЛИРОВАНИЯ СИМЕНСОВ И АМЕРИКАНСКИЕ ИНЕРЦИОННЫЕ РЕГУЛЯТОРЫ

Das Siemenssche Regulirprinzip und die amerikanischen «Inertie»—Regulatoren von Prof. A. Stodola, Zürich

Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, B. XXXXXIII, 1899, N 18, стр. 506—516; N 20, стр. 573—579

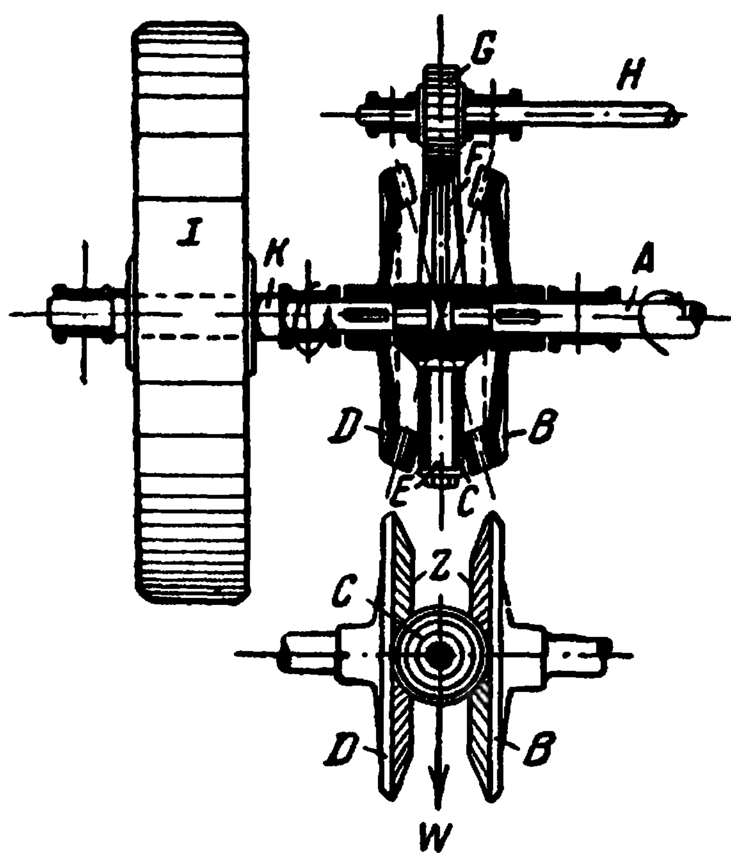
ПРИНЦИП РЕГУЛИРОВАНИЯ СИМЕНСОВ И АМЕРИКАНСКИЕ ИНЕРЦИОННЫЕ РЕГУЛЯТОРЫ



В 1845 г.* Вернер и Вильгельм Сименсы предложили конструкцию регулятора, в котором ускорение или замедление вращающегося вала машины, обусловленные изменениями нагрузки, используются для перестановки органа управления и притом, по идее изобретателей, так, что, по крайней мере в принципе, при изменении нагрузки от нуля до полной величины и в обратном направлении, должно наблюдаться лишь ничтожно малое изменение скорости. Устройство этого регулятора в основных своих чертах изображено на фиг. 1. Здесь A — приводимый во вращение двигателем при помощи любой передачи вспомогательный вал, число оборотов которого пропорционально числу оборотов главного вала. Этот вал соединен при помощи конических шестерен B, C и D с валом K, причем шестерня C, являясь дифференциальной шестерней, свободно вращается вокруг собственной оси E и вокруг вала A. Втулка, в которой укреплена ось E, несет, например, сегмент цилиндрической шестерни F, при сцеплении

* Dingler's Polytechnisches Journal, B. 98, стр. 81. W. Siemens, Gesammelte Abhandlungen und Vorträge, 1881, стр. 9.

которой с цилиндрической шестерней G поворачивается вал H, переставляющий орган управления, в результате чего тем или иным способом увеличивается или уменьшается мощность двигателя. Основной частью конструкции является заклиненный на валу K маховик I. Если ось E при помощи внешней силы сделать неподвижной, то движение будет передаваться с вала A на вал K и угловая скорость вала K будет равна по величине, но противоположна по направлению, угловой скорости вала A.



Фиг. 1

Предполагается, что силы трения в подшипниках маховика (как и трение о воздух) ничтожно малы по сравнению с тем сопротивлением, которое оказывает всякому повороту управляющий вал H.[1] Если маховик достиг требуемой скорости, то эта угловая скорость будет длительно сохраняться без изменения в случае установившегося режима. Нарушение равновесия между движущей силой и сопротивлением на валу двигателя протекает следующим образом. Предположим, что сопротивление уменьшилось, что массы машины движутся ускоренно, и пусть сначала ось E закреплена. Тогда ускорение вала передается без изменения валу K и вызовет на окружности шестерни D давление на зубья

$$Z = Mp,$$

если мы под M будем понимать массу маховика, приведенную к окружности шестерни D, а под p — ускорение точек той же окружности. Пренебрегая несущественным трением, по-

лучим, что между колесами B и C действует то же самое давление зубьев, а на ось E передается сила, равная $2Z$. До тех пор, пока $2Z$ меньше приведенного к тому же радиусу сопротивления механизма управления W, ось E будет оставаться в покое без внешнего воздействия; если $2Z > W$, то вал механизма управления начнет поворачиваться и движущая сила уменьшится.

В обычном центробежном регуляторе получаемая при изменении нагрузки перестановочная сила в первый момент ничтожно мала, так как она пропорциональна постепенно развивающемуся изменению угловой скорости. Напротив, в сименсовских регуляторах ускорение сразу появляется вслед за изменением сопротивления и в тот же самый момент возникает давление зубьев Z. Так как Z растет пропорционально M, то может показаться, что в нашем распоряжении имеется любая по величине перестановочная сила уже в самом начале процесса регулирования. Отсюда легко заключить, что в этом случае регулирование может быть завершено в исчезающе малый промежуток времени.

Эти выводы, однако, идут слишком далеко. Действительно, ускорение p вызывается изменением движущей силы, равным, если его привести к окружности колеса, ΔP кг. Обозначив остальную вращающуюся массу двигателя, приведенную к тому же радиусу, через M_s, для случая неподвижной оси E получим ускорение

$$p = \frac{\Delta P}{M + M_s}$$

и начальную перестановочную силу

$$2Z = 2M_p = \frac{M}{M + M_s} \Delta P,$$

которая при постоянном ΔP растет не прямо пропорционально M и при увеличении M не может быть сделана произ-

вольно большой. Далее для перестановки органов управления требуется некоторое относительное смещение валов A и K, которое, вследствие малой разницы в скоростях этих валов, нуждается для своего осуществления в сравнительно большом промежутке времени. Существенно большее значение имеет замечание, что рассматриваемое устройство при некоторых обстоятельствах может полностью перестать действовать. Действительно, пусть изменение нагрузки будет так мало, что развиваемая перестановочная сила $2Z$ будет меньше сопротивления W механизма управления. Тогда этот механизм вообще не начнет действовать, изменение сопротивления двигателя не будет скомпенсировано и скорость может неограниченно расти или убывать. Равным образом легко убедиться в том, что как раз в идеальном случае, когда и сопротивление W и трение в подшипниках ничтожно малы, регулирующее устройство практически непригодно.[2] Наконец, необходимо отметить, что регулятор автоматически не устанавливает число оборотов машины (это будет показано ниже).

По своему устройству регулятор Сименсов отличается от представленного на фиг. 1 прежде всего вертикальным положением валов A и K, а также особенностью вращающейся массы, в качестве которой был выбран тяжелый круговой маятник. В установившемся состоянии отклонение вращающегося маятника неизменно. Если скорость машины замедляется, то вследствие наличия некоторой реакции распределительного механизма окружная скорость маятника уменьшается, что влечет за собой уменьшение центробежной силы и отклонение ее. Однако число оборотов не должно в этом случае так сильно измениться, как это было бы в случае обычного маховика. Как показано у Сименсов, ход машины становится более изохронным.

Указанные выше принципиальные недостатки рассматриваемого устройства могли бы быть устранены, если бы сопротивление органа управления было сделано пропорц

нальным, например, скорости, с которой поворачивается управляющий вал, или, например, тогда, когда это сопротивление стремится к нулю вместе с уменьшающейся скоростью.[3] Вычисления показывают, что в этом случае скорость машины после возможных быстро затухающих колебаний стремится к определенному значению и что таким образом этому устройству могли бы быть приданы свойства статического регулятора.

Одним из средств для этого мог бы явиться катаракт, сопротивление которого, как известно, возрастает почти в том же отношении, в каком возрастает скорость.

Но и без дальнейших дополнений этот регулятор, видимо, себя оправдывал в течение некоторого времени. Так, братья Сименс сообщают, в ранее цитированной нами статье, что одна машина, кроме регулятора их системы, была снабжена для контроля центробежным регулятором (очевидно, только для того, чтобы определять число оборотов) и что последний даже при максимально возможных изменениях нагрузки „не выходил из состояния покоя", т. е. скорость изменялась едва заметно.

То обстоятельство, что устройство, названное Сименсами „дифференциальным регулятором", не удовлетворяет полностью требованиям, предъявляемым к регулятору, ясно из сказанного выше. Это, однако, не должно помешать нам установить, что Сименсы открыли новый многообещающий принцип, которому по справедливости, как это сделано в заголовке, можно присвоить их имя *.

Этот новый принцип, коротко говоря, состоит в следующем. *При изменениях нагрузки ускоряется свободно вращающаяся вместе с валом двигателя дополнительная масса. Сила,*

---

* Подтвердит ли исследование первоисточников приоритет Сименсов, автор утверждать не может, так как необходимая для этого историческая литература не находится в его распоряжении.

ускоряющая эту дополнительную массу, вызывает противодействие (реакцию), порождаемую инерцией дополнительной массы, которая и используется для перестановки органа управления двигателя.[4]

Для краткости и для отличия от динамометрических и тахометрических регуляторов, приводимых в литературе в качестве особых классов, назовем регуляторы, основанные на этом принципе, *инерционными* регуляторами.

Американцы быстро установили, к каким конструкциям регуляторов принцип Сименсов наиболее применим, и выбрали действующие непосредственно на управляющий эксцентрик[5] осевые или плоские регуляторы *.

При этом необходимое изменение эксцентриситета и угла опережения, как известно, всегда можно осуществить при помощи смещения середины эксцентрика по дуге круга, называемой линией центров, т. е. при помощи относительного вращения эксцентрика по отношению к валу. Чтобы использовать для этого поворота силы инерции, существуют, очевидно, два пути:[6]

а) вал плоского регулятора снабжают концентрической достаточно большой вспомогательной вращающейся массой, которая может свободно качаться на том же валу, и связы-

---

* Согласно докладу F. H. Ball на заседании Американского об-ва инженеров-механиков в 1896 г., инерционный принцип к регуляторам в Америке был впервые применен Shive в 1870 г. В последние годы использование плоских регуляторов этого рода в США увеличилось настолько, что название „американские инерционные регуляторы" кажется оправданным (согласно частным сведениям автора, число применяющих их фирм, изготовляющих паровые машины, равно от 40 до 50). Необходимо, однако, указать, что в то время как в Америке инерционный принцип оставался еще совершенно незамеченным, в Европе уже создавались самостоятельные конструкции: так, в Германии появились регуляторы Kummer (в 1891 г.) и Daevel (в 1893 г.), а Hagelin (немецкий патент № 11283) еще в 1880 г. применил сименсовский принцип к вертикальным регуляторам.

вают эту массу с эксцентриком (при помощи стержней или других связей) таким образом, что при ускорении машины отстающая вспомогательная масса ставит эксцентрик на малое наполнение (при замедлении — наоборот);

б) вал плоского регулятора жестко связан с цапфой, вокруг которой может вращаться шайба эксцентрика, либо выполненная как вспомогательная вращающаяся масса, либо, как обычно, несущая на себе эту последнюю. Здесь дело в том, что, как будет показано ниже, момент сил инерции не зависит от положения центра вращения относительно оси вала (предполагается, что вспомогательная масса качается около центра тяжести); при этом положение центра вращения и направление возникающего при изменениях нагрузки вращения шайбы опять-таки должны быть выбраны так, чтобы при ускорении машины отстающий эксцентрик уменьшал наполнение.

Существенные дополнения получил сименсовский принцип в американском инерционном регуляторе, так как последний является соединением в одно целое собственно инерционного и центробежного регуляторов. Действительно, устройство Сименсов имеет тот недостаток, что на начальную скорость машины регулятор не может воздействовать. Если, например, орган управления сдвинут до полного прекращения подачи рабочего вещества, то без искусственного воздействия нельзя даже запустить машину, так как начинающееся вращение переставит управление в самое крайнее положение, соответствующее нулевой мощности.

Двигатель (если это допускается приводимой в движение рабочей машиной) может иметь здесь любое число оборотов, так как действие регулятора не зависит от величины скорости.

Американские конструкторы используют теперь преимущественно инерцию как перестановочную силу, сочетая ее использование с относительно слабым центробежным регуля-

тором. которого как раз хватает для установления — в установившемся режиме — определенной угловой скорости. Конструкция подобного рода регулятора может быть поэтому коротко описана следующим образом. Проектируют, согласно обычным правилам, плоский центробежный регулятор с эксцентриком, перемещающимся по центральной кривой, с весьма незначительной „энергией". Центробежный регулятор связывают с вспомогательной вращающейся массой, которая или свободно вращается вокруг специального болта (лучше всего вокруг оси самого регулятора), или выполнена как одно целое с центробежной массой или с эксцентриковой шайбой регулятора. В первом случае соединение осуществляется при помощи стержней или других связей, и вспомогательная масса принимает участие в движении центробежной массы регулятора. Устройство ограничено лишь условием, чтобы по возможности было устранено вредное трение и чтобы силы инерции, как было упомянуто выше, правильно управляли движением.

В излагаемом ниже теоретическом исследовании регуляторов этой системы прежде всего рассматриваются силы инерции, затем устанавливаются условия устойчивости и, наконец, определяется величина наибольшего отклонения скорости во время переходного процесса в зависимости от параметров регулятора и двигателя. В заключение коротко описываются некоторые американские и европейские конструкции.

СИЛЫ ИНЕРЦИИ

Во всех проблемах, посвященных изучению регуляторов, необходимо рассматривать относительное движение или относительное равновесие. Относительное движение, как известно, может рассматриваться как абсолютное движение, если к реально действующим на каждый элемент массы силам при-

бавить обе добавочные силы инерции относительного движения *.[7]

Рассмотрим какую-нибудь движущуюся точку и назовем „основной системой“ пространство,[8] в котором будет происходить относительное движение. Первая из добавочных сил инерции совпадает с той реакцией, которую оказывала бы на основную систему материальная точка, если бы она была принуждена двигаться вместе с совпадающей с ней в данный момент точкой основной системы, т. е. является величиной, равной произведению массы частицы на „ускорение системы“ в данном месте и действующей на частицу в направлении, прямо противоположном этому ускорению.

Вторая добавочная сила инерции называется „сложной центробежной силой“, или силой Кориолиса, и ее определение дано в упомянутых учебниках. Она направлена перпендикулярно к траектории относительного движения, а так как эта траектория для масс регулятора определена направляющими или неподвижной точкой вращения, то действие второй добавочной силы сводится лишь к давлению на направляющие или к давлению на подшипники; поэтому она не может оказывать никакого влияния на равновесие или движение.

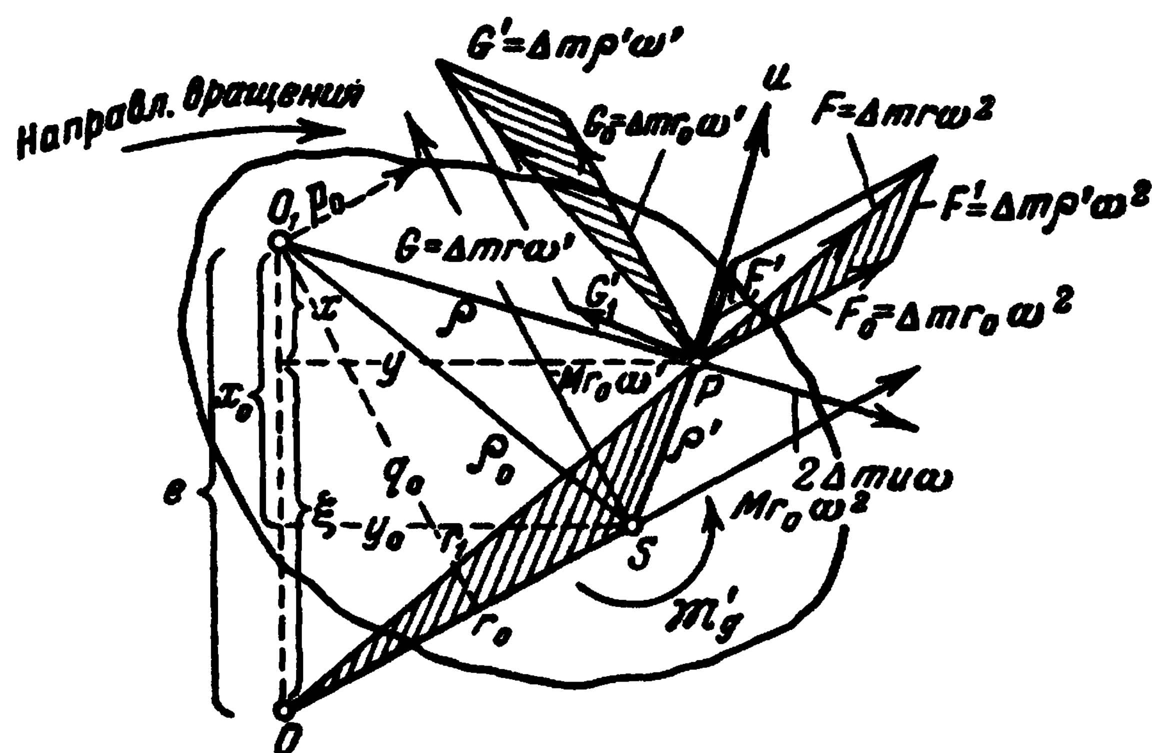
В дальнейшем рассматривается плоский регулятор. Пусть на фиг. 2 обозначено: O — вал регулятора, O_1 — центр вращения вспомогательной массы (инерционного маятника), P — центр тяжести элемента массы Δm, u — относительная скорость этого элемента, ω — угловая скорость вала регулятора, $\omega' = \frac{d\omega}{dt}$ — угловое ускорение, S — центр тяжести инерционного маятника.

Значения остальных букв ясны из фигуры. Добавочные силы могут быть разложены так же, как и ускорения, и таким образом в точке P получаем:

* См. учебники механики Ritter, Weisbach — Hermann. Schell и др.

$F = \Delta m r \omega^2$ — радиальная, направленная наружу сила инерции, возникающая из-за центростремительного ускорения соответствующей точки основной системы. Эта сила представляет собой обычную центробежную силу инерции;

$G = \Delta m r \omega'$ — тангенциальная добавочная сила инерции, возникающая вследствие ускорения вращения основной системы;



Фиг. 2

$2 \Delta m \omega u$ — кориолисова добавочная сила инерции, направленная по радиусу ρ; уравновешивается противодавлением оси вращения O_1 и поэтому во внимание не принимается.

Для того чтобы найти результирующую сил инерции, разложим центробежную силу F на компоненты F_0 и F', из которых первая параллельна радиусу-вектору r_0 центра тяжести, а вторая совпадает по направлению с прямой, проведенной из центра тяжести S в точку P.

Треугольник сил $F F_0 F'$ вследствие равенства углов подобен треугольнику OPS. Отсюда получаем двойное соотношение

$$F : F_0 : F' = r : r_0 : \rho'$$

и, следовательно,

$$F_0 = F \frac{r_0}{r} = \Delta m r_0 \omega^2,$$

$$F' = F \frac{\rho'}{r} = \Delta m \rho' \omega^2.$$

Разлагая на ортогональные компоненты, убеждаемся, что совокупность сил F' дает результирующую силу и результирующий момент, равный нулю. Силы F_0 все параллельны радиусу-вектору r_0 и пропорциональны величине элемента массы Δm. Их результирующая приложена в центре тяжести S и по величине и направлению равна центробежной силе, которая действовала бы на массу инерционного маятника, если бы она была сосредоточена в его центре тяжести, т. е. равна $M r_0 \omega^2$, где M обозначает массу всего маятника. Это — известный закон сложения центробежных сил.

Момент результирующей центробежной силы относительно центра вращения O_1 равен

$$\mathfrak{M}_f = M r_0 \omega^2 q_0,$$

где q_0 означает длину перпендикуляра, опущенного из O_1 на направление OS. Так как произведение $r_0 q_0$ равно двойной площади треугольника OSO_1, можно также написать:

$$\mathfrak{M}_f = M e y_0 \omega^2. \qquad (1)$$

Для того чтобы сложить тангенциальные силы инерции G, разложим каждую отдельную силу на компоненты G_0 и G', из которых первая перпендикулярна к радиусу-вектору r_0 центра тяжести, а вторая перпендикулярна к радиусу-вектору ρ'. Треугольник сил GG_0G' из-за равенства углов также подобен треугольнику OPS, откуда получаем двойное соотношение:

$$G : G_0 : G' = r : r_0 : \rho'$$

и, следовательно,

$$G_0 = G\frac{r_0}{r} = \Delta m r_0 \omega',$$

$$G' = G\frac{\rho'}{r} = \Delta m \rho' \omega'.$$

Разлагая на ортогональные компоненты, вновь убеждаемся, что результирующая сила, порождаемая компонентами G', исчезает. Но остается результирующая пара сил, величину которой лучше всего определить, образуя моменты G' относительно центра тяжести S. Получим:

$$\mathfrak{M}_{g'} = \sum \Delta m \rho'^2 \omega' = I_0 \omega', \tag{2}$$

где I_0 означает момент инерции вращающейся массы относительно центра тяжести. Компоненты G_0 параллельны друг другу и пропорциональны элементам масс, к которым они приложены. Отсюда следует, что их результирующая имеет то же направление, а по величине равна

$$G_r = \sum \Delta m r_0 \omega' = r_0 \omega' \sum \Delta m = M r_0 \omega'. \tag{2a}$$

Этот результат можно выразить следующим правилом:

*совокупность приложенных к инерционному маятнику регулятора тангенциальных сил инерции может быть сведена к результирующему моменту $I_0\omega'$ и к результирующей силе $Mr_0\omega'$. Момент $I_0\omega'$ равен по величине и по знаку тому моменту тангенциальных сил инерции, который получился бы, если бы центр тяжести инерционного маятника совпадал с осью вала регулятора. Результирующая сила инерции $Mr_0\omega'$ приложена к центру тяжести (тангенциально) и по величине и направлению равна силе инерции всей массы маяникта, если ее сконцентрировать в центре тяжести**.*

* Следует заметить, что аналогичное правило сложения справедливо для всех таких сил, которые пропорциональны массам и расстояниям от оси вращения и образуют с радиусами произвольный, но все время одинаковый угол.

К тем же результатам можно притти еще проще, если движение основной системы, т. е. вращение около точки O, разложить на вращение вокруг S с угловой скоростью ω и на поступательное перемещение, при котором каждая точка системы имеет в каждый данный момент равную по величине и направлению скорость $r_0\omega$.

Фиг. 3

В этом случае движение точки основной системы, совпадающей с P, можно само трактовать как относительное вращение по отношению к пространству, движущемуся поступательно с мгновенной скоростью $r_0\omega$, точки которого описывают одинаковые круговые траектории радиуса r_0. Ускорение системы отсчета в точке P в этом случае представляет собой результирующую ускорения поступательного перемещения и ускорения относительного вращения. На фиг. 3 пунктиром указаны компоненты скорости $\rho'\omega$ и $r_0\omega$, из которых складываются скорости системы отсчета в точке P. Кориолисову силу, как было указано выше, можно не рассматривать, и таким образом следует учитывать только следующие силы инерции:

$\Delta m r_0 \omega^2$ — от центростремительного ускорения рассматриваемого здесь переносного движения,

$\Delta m r_0 \omega'$ — от тангенциального ускорения этого же переносного движения,

$\Delta m \rho' \omega^2$ — от центростремительного ускорения рассматриваемого относительного вращения,

$\Delta m \rho' \omega'$ — от тангенциального ускорения рассматриваемого относительного вращения.

Направления этих сил инерции указаны на фигуре; сложение их приводит к тем же выводам, что и выше.

Важный для дальнейшего момент тангенциальных сил инерции относительно центра вращения маятника O_1, согласно фиг. 2 и 3, равен:

$$\mathfrak{M}_g = I_0 \omega' + M r_0 \omega' p_0 , \tag{2b}$$

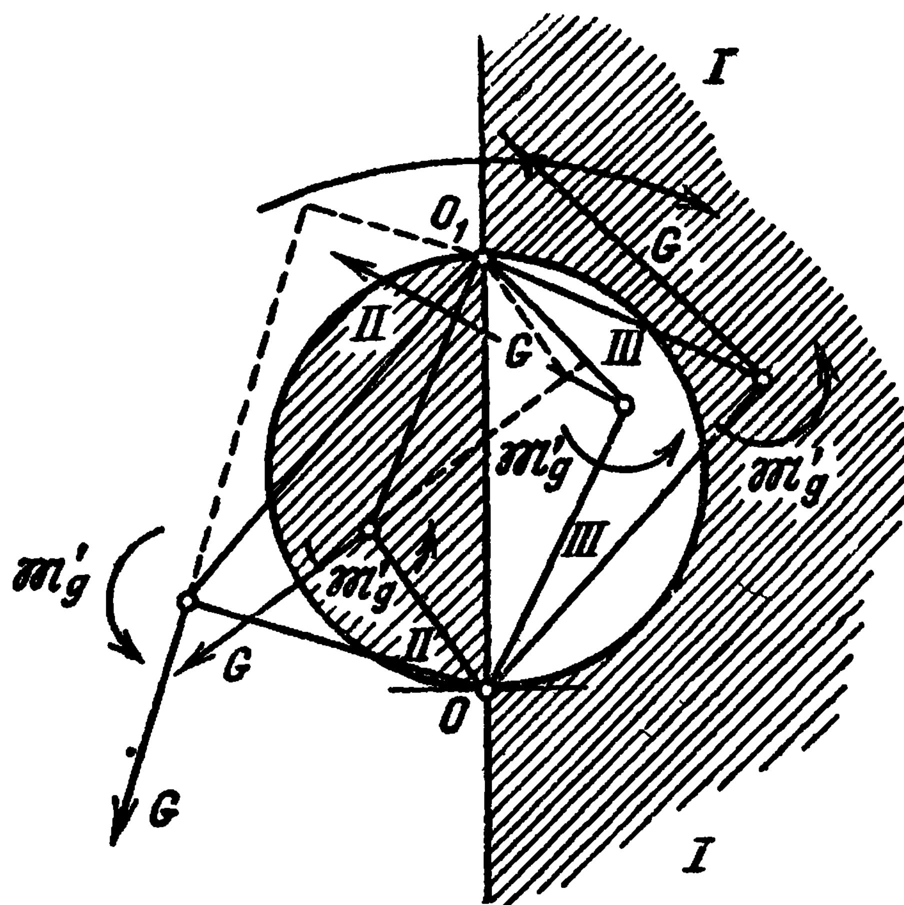
где p_0 — длина перпендикуляра, опущенного из O_1 на результирующую $M r_0 \omega'$, которую нужно взять с отрицательным знаком, если результирующая проходит по другую сторону от O_1. Знак момента $\mathfrak{M}_g$ при наличии ускорения вращения противоположен знаку ω. Если r_0 или p_0 исчезают, то $\mathfrak{M}_g$ сводится просто к выражению $I_0 \omega'$. Отмечая последний случай, мы можем сформулировать правило:

если центр тяжести инерционного маятника совпадает с центром вращения O_1, то величина инерционного момента не зависит от положения центра тяжести, относительно оси вала.

Заслуживает также внимания другое свойство момента сил инерции, вытекающее из уравнения (2), а именно, что его величина при заданном положении S, O и O_1 зависит лишь от массы и момента инерции маятника, но не от прочих особенностей распределения масс.

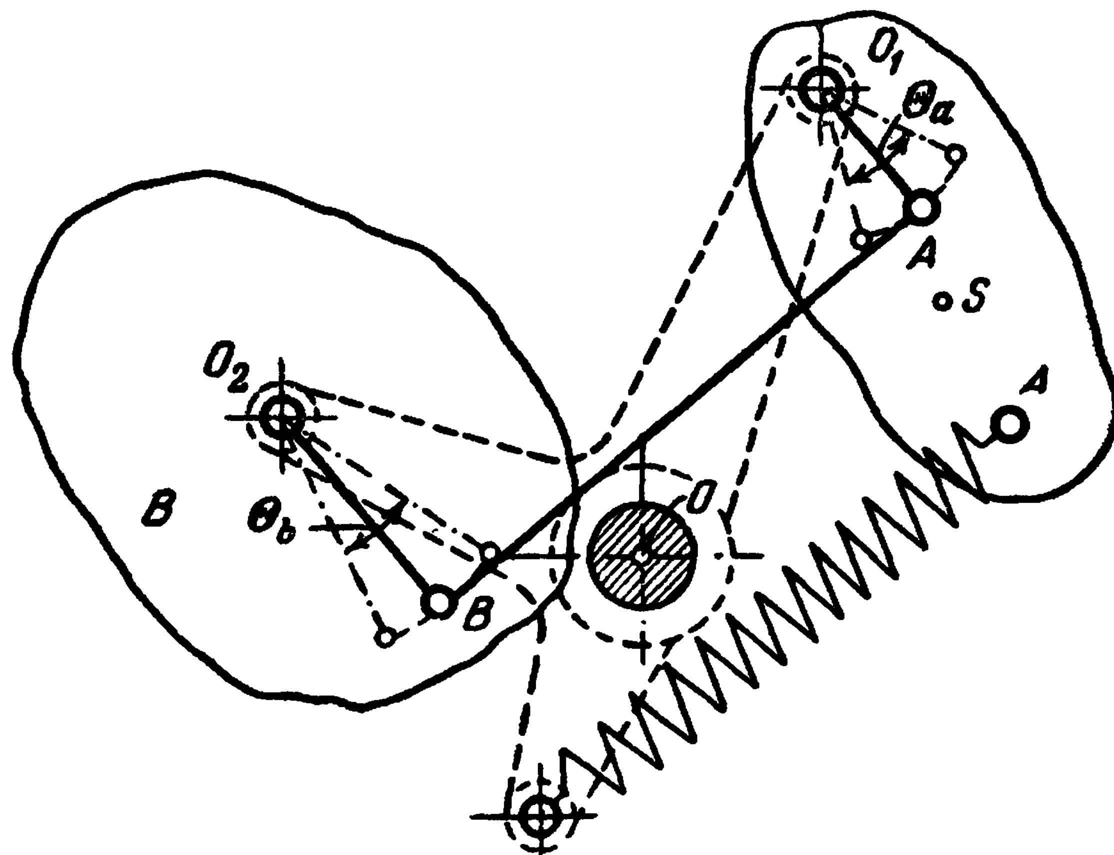
Часть момента тангенциальных сил инерции $M r_0 p_0 \omega'$, зависящая от положения центра тяжести, может, как было выше отмечено, или помогать действию второй части $I_0 \omega$, зависящей от момента инерции, или ей противодействовать. Первое бывает в том случае, если центр тяжести лежит в заштрихованной области $I — I$ (фиг. 4), представляющей

собой полуплоскость с круговым вырезом, построенном на отрезке OO_1. Этот случай в отношении использования масс является наиболее благоприятным и требует, чтобы *маятник опережал вращение*. Если момент инерции относительно центра тяжести очень мал или если, как в предельном случае, вся масса маятника сосредоточена в центре тяжести (что приближенно принимается для многих обычных плоских регуляторов), то действие инерции будет также полезным, если центр тяжести лежит в области $II — II$ (фиг. 4), т. е. при *отстающем маятнике*. В этом случае, однако, часть момента $I_0\omega'$, о котором идет речь, зависящая от момента инерции, действует всегда противоположно центробежной силе (т. е. стремится уменьшить размах маятника, когда он должен расти, и наоборот), что надо иметь в виду при выполнении регуляторов. Внутри области $III — III$ момент тангенциальных сил инерции равен $I_0\omega' — M r_0 p_0 \omega'$ и может быть положительным, если массы очень удалены от центра вращения, т. е. если момент инерции велик. Можно также этот момент уничтожить, так что ничего не останется от действия тангенциальных сил инерции (по крайней мере при некотором определенном положении). Впрочем, чем больше будет выбран угол OPO_1, тем больше будет при заданной работоспособности пружинного регулятора объем металла пружины. Поэтому значения, близкие к 90° и большие, для этих углов исключены.



Фиг. 4

Инерционный — в точном смысле этого слова — регулятор имеет в основном устройство, представленное на фиг. 5. Здесь — A центробежная масса незначительной величины, B — инерционная масса, качающаяся около цапфы O_2 и связанная стержнем AB с центробежным регулятором. Точку O_2 можно по желанию совмещать с O, O_1 или с центром качания эксцентрика, в результате чего получатся указанные ранее частные случаи. Центр тяжести B совпадает с центром вращения.



Фиг. 5

Первой вычислительной задачей, подлежащей здесь решению, является определение момента сил, действующего на A со стороны B, и определение „приведенной" массы всей системы. Решение этой задачи найдем следующим образом.

Обозначим:

I_{a0} — момент инерции A, относительно его центра тяжести S;

$I_a = I_{a0} + \rho_0^2 M_1$ — то же, относительно оси O_1;

$I_{b0} = I_b$ — то же для B относительно центра тяжести O_2;

θ_a — угол отклонения массы A, отсчитанный от определенного нулевого положения;

θ_b — угол отклонения массы B, отсчитанный от того же нулевого положения.

Момент сил инерции, действующих на массу B, согласно сказанному ранее, равен $I_b\omega'$. Обозначим его через $\mathfrak{M}'_g$. Вследствие наличия кинематической связи между B и A момент $\mathfrak{M}'_g$, действующий на B, порождает момент $\mathfrak{M}''_g$, действующий на A. Если система совершает бесконечно-малое перемещение, при котором углы изменяются на $\delta\theta_a$ и соответственно на $\delta\theta_b$, то

$$\mathfrak{M}'_g\delta\theta_b = \mathfrak{M}''_g\delta\theta_a.$$

В большинстве случаев отношение

$$\frac{\theta_b}{\theta_a} = \lambda \qquad (3)$$

постоянно, так что

$$\mathfrak{M}''_g = \mathfrak{M}'_g\lambda = \lambda I_{b0}\omega'.$$

В целом момент сил инерции, приложенный к A, равен

$$\mathfrak{M}_g = I_{a0}\omega' + Mr_0p_0\omega' + \lambda I_{b0}\omega'$$

или, короче,

$$\mathfrak{M}_g = I'\omega', \qquad (4)$$

если обозначить через

$$I' = I_{a0} + Mr_0p_0 + \lambda I_{b0} \qquad (4a)$$

приведенный к A общий момент инерции, входящий в выражение момента сил инерции.

Если мы захотим заменить I_b массой, приведенной к A и обладающей той же кинетической энергией, то нам должно

быть известно соотношение между угловыми скоростями ω_b и ω_a. Для простоты примем, что

$$\omega_b = \lambda\omega_a,$$

где λ имеет прежнее значение. Кинетическая энергия в относительном движении

$$L = \frac{1}{2} I_a\omega_a^2 + \frac{1}{2} I_b\omega_b^2 = \frac{1}{2}(I_a + \lambda^2 I_b)\,\omega_a^2.$$

Таким образом,

$$I = I_a + \lambda^2 I_b \tag{5}$$

— приведенный к A момент инерции, входящий в выражение кинетической энергии.

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕГУЛИРОВАНИЯ

Рассмотрим нарушение равновесия между движущим моментом и моментом сопротивления на валу двигателя в том случае, когда, после такого нарушения, момент сопротивления остается неизменным и двигатель предоставляется управлению автоматически-действующего регулятора. Такое нарушение обусловливает возникновение определенного переходного процесса, во время которого регулятор приспосабливает подачу рабочего вещества к новой нагрузке и который, в общем случае, состоит из перемежающихся интервалов ускорения и замедления скорости двигателя. Чем меньшими оказываются во время этого процесса отклонения скорости по величине и числу, тем регулирование должно быть названо лучшим. Однако может случиться, что такие отклонения скорости отнюдь не прекращаются, а наоборот, увеличиваются по своим размахам, так что после внезапного нарушения равновесия новое равновесное состояние никогда не достигается. В этом последнем случае состояние равновесия, которое имело место до возмущения, называется неустойчивым. Таким образом оказывается возможным говорить об устойчивом и неустойчивом регулировании.

„Устойчивость“ является, само собой разумеется, первым требованием, которое мы должны предъявить к каждому регулирующему устройству, и этот вопрос должен быть здесь рассмотрен в первую очередь.

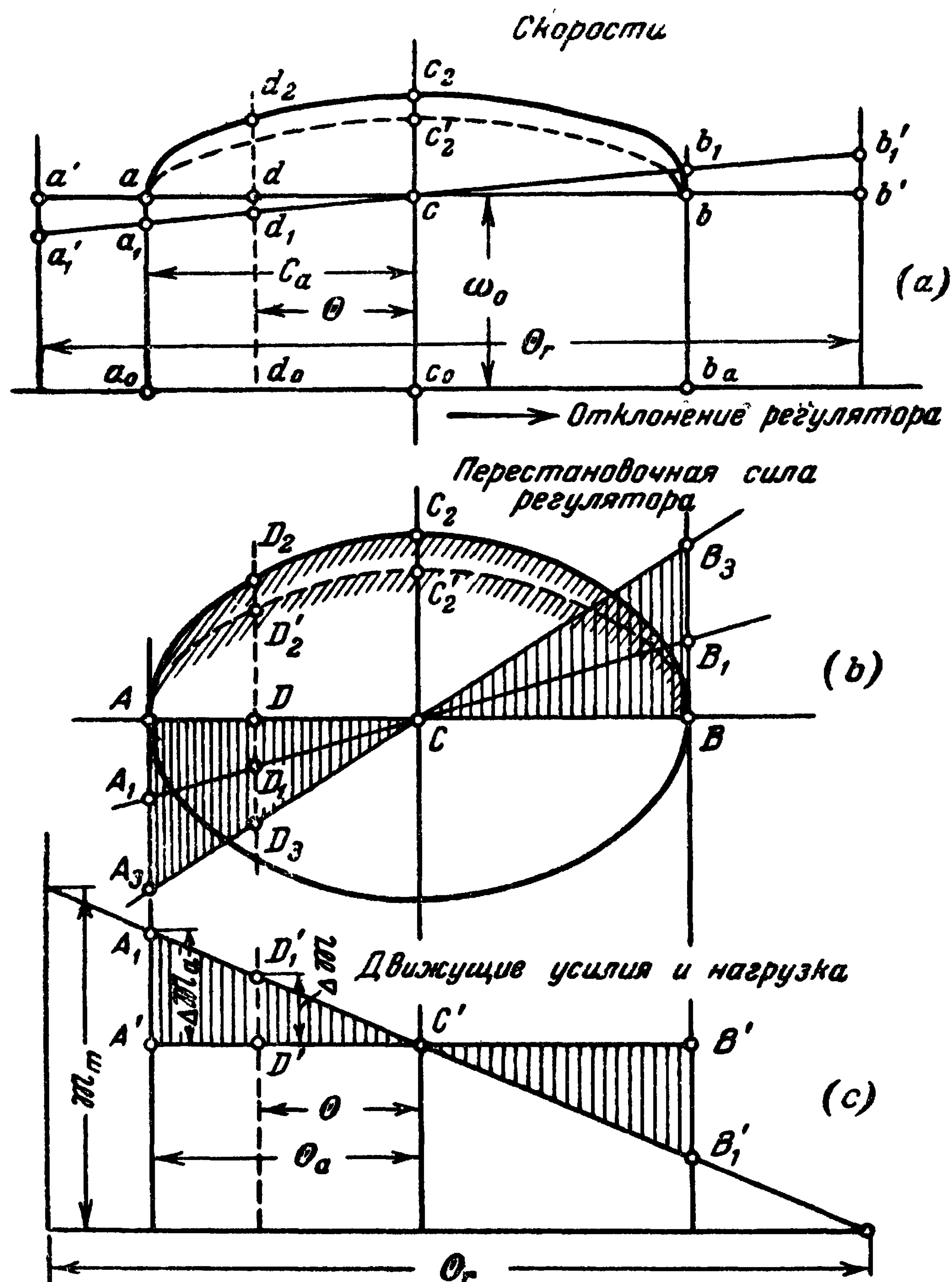
Для упрощения рассуждений целесообразно выделить какую-нибудь точку регулятора, например центр тяжести груза маятника, и все массы и силы, определяющие движение регулятора, привести к этой точке. Таким же образом можно поступить и с вращающимися массами двигателя. Движение любой из этих точек, так как каждая из них имеет лишь одну степень свободы, можно рассматривать при помощи обычного закона движения материальной точки: *масса* $\times$ *ускорение* = = *действующей силе*.

Для „точки регулятора“ здесь идет речь лишь об относительном движении, и при рассмотрении такого движения нужно принять во внимание следующие силы: а) силу, действующую со стороны пружины, б) радиальную силу инерции (т. е. центробежную силу), в) тангенциальную (суммарную) силу инерции, г) силу трения. Реакцию управляющего устройства мы вначале опустим.

Для „точки двигателя“ нужно принять во внимание лишь движущую силу и силу сопротивления. Обе эти материальные точки во время своего движения взаимодействуют друг с другом, так как регулятор изменяет движущую силу, а последняя, в свою очередь, влияет на скорость вращения главного вала и, следовательно, на величину сил инерции.

На фиг. 6 изображены приведенные силы, действующие на точку регулятора (фиг. 6, *b*), и приведенные силы, действующие на точку двигателя (фиг. 6, *c*). Эти силы рассматриваются на некотором интервале ACB отклонений регулятора, причем направление от A к B соответствует увеличению отклонения. Точка C соответствует новому (после изменения нагрузки) равновесному положению регулятора и ордината $\omega_0 = c_0c$ (фиг. 6, *a*) изображает равновесную угловую скорость.

Регулятор — статический, и a_1b_1 означает кривую скорости при равновесии, соответствующую рассматриваемым положени-



Фиг. 6

ям муфты регулятора (линия a_1b_1 может быть принята за прямую). Сила, действующая со стороны пружины, такова, что она как раз уравновешивает центробежные силы, соответству-

ющие кривой равновесия. Из отрезков $a'a'_1$ и $b'b'_1$ известным способом определяется неравномерность регулятора.

Пусть регулятор, совершая переходный процесс, находится в точке D и пусть мгновенно наблюдаемая скорость равна d_0d_2. Так как скорость d_0d_1 соответствует равновесию, то имеется излишек d_1d_2, который обусловливает появление перестановочной силы, в первом приближении пропорциональной этому излишку и показанной на фигуре в виде отрезка D_1D_2. Эту перестановочную силу можно разделить на части DD_1 и DD_2. Первая отвечает излишку скорости dd_1 и возникает, например, тогда, когда при неизменной скорости ω_0 регулятор из положения C смещается в положение D. Эта часть может быть названа статической перестановочной силой, так как она характеризует статические свойства регулятора. Вторая часть DD_2 пропорциональна излишку dd_2, и ее можно назвать динамической перестановочной силой. Интересующая нас часть кривой движущей силы представлена отрезком $A'_1C'B'_1$, который также можно считать прямой линией. В положении D мгновенный излишек движущей силы изображается отрезком $D'D'_1$. При этом, конечно, не учитывается прерывистость действия механизма распределения и изменение движущей силы за один оборот паровой машины. Этот излишек вызывает определенное угловое ускорение, а тем самым на регуляторе — тангенциальную силу инерции и момент по формуле (2b), который, будучи приведенным к центру тяжести, представлен отрезком D_1D_3. Поскольку отклонение регулятора мало, D_1D_3 можно считать просто пропорциональным излишку силы ΔP, и при правильном устройстве эта сила сложится со статической перестановочной силой.

Действие тангенциальной силы инерции состоит поэтому в пропорциональном увеличении статической перестановочной силы.

В дальнейшем в качестве силы сопротивления прежде всего рассмотрим жидкостное трение, порождаемое так называемым

катарактом, которое можно считать прямо пропорциональным скорости движения „точки регулятора“. Границу устойчивости регулирования образует в этом случае состояние, при котором регулятор колеблется с постоянной амплитудой около точки равновесия, и скорость двигателя колеблется около значения, отвечающего равновесному значению.

Теоретическое рассмотрение показывает, что если с момента возмущения скорости прошло достаточно много времени, то эти колебания будут чисто гармоническими, т. е. все переменные величины изменяются в зависимости от времени по синусоидальному закону. Если сейчас возможность такого состояния движения нами специально постулируется, то из дальнейшего рассмотрения такая форма движения будет вытекать сама собой.

В силу этого скорость двигателя и смещение регулятора — синусоидальные функции времени равного периода; поэтому скорость в зависимости от смещения регулятора представится, как известно, эллипсом. Примем, что при любом начальном отклонении точки регулятора на отрезке AB устанавливаются колебания с размахами $AC = CB$. В течение времени, пока происходит движение регулятора от A до C, будет иметься излишек силы для „точки двигателя“, в связи с чем его скорость будет расти и в положении C достигнет наивысшего значения. Соответствующий эллипс имеет поэтому горизонтальную главную ось и представлен на фиг. 6, *a* дугой ac_2b. Скорость точки регулятора также должна изображаться эллипсом, построенным над ab, например, ac_2b. При этом A и B являются конечными точками колебаний; они соответствуют нулевой скорости, положение C — максимуму скорости. По предыдущему D_3D_2 представляет собой равнодействующую силы пружины и сил инерции, действующих на инерционный маятник. К этим силам следует добавить сопротивление масляного катаракта, пропорциональное ординатам эллипса $ac_2'b$, которое может быть представлено кривой $AD_2'C_2'B$. Если колеба-

ния точки регулятора чисто гармонические, то, как известно, движущая результирующая сила пропорциональна расстоянию точки от положения равновесия C. Это будет в том случае, если масляный катаракт установлен так, что точка C'_2 совпадает с C_2 и границей устойчивости будет являться тот замечательный случай соотношения сил, когда *в каждый данный момент динамическая перестановочная сила как раз уравновешивается сопротивлением катаракта.* Свободными силами остаются вертикальные ординаты плоских треугольников AA_3C и CB_3B. Эти силовые площади вместе с тем представляют количество энергии, которая в первую четверть колебаний сообщается массе, во вторую четверть колебаний опять отнимается и т. д. Наклон линии A_3B_3 не зависит от размаха колебаний, т. е. от начального положения регулятора, или, что то же, от начальной нагрузки двигателя. Период гармонических колебаний, как известно, определяется лишь наклоном силовой линии, следовательно, одинаково велик для каждого изменения нагрузки. Он будет тем меньше, чем бо́льшими выбраны степень неравномерности и действие инерции.

Если предположить, что действие катаракта внезапно усиливается, например начиная с точки A, то кривая сопротивления AC'_2 поднимется выше кривой динамической перестановочной силы AD_2C_2. Характер кривых изменится, колебания будут, как говорят в физике, затухающими. Точка регулятора не достигнет положения B по другую сторону C, так как сопротивление катаракта поглотит часть рабочей площади AA_3C. Кривая скорости ac_2 ... в форме спирали приближается к точке равновесия c. Обратное явление будет в том случае, когда действие катаракта уменьшится. Устойчивость регулирования, таким образом, при прочих заданных величинах определяется наименьшей силой масляного катаракта и может быть обеспечена в каждом отдельном случае.[9]

Линия перестановочной силы A_3CB_3 не обязательно складывается из ординат линий AA_1 и A_1A_3, как это показано на

фиг. 6. Поэтому ордината AA_1 может равняться нулю или даже быть отрицательной, что не изменяет существа дела, и мы приходим к следующему важному результату:

Инерционный регулятор допускает применение полностью астатического и даже неустойчивого регулятора. Число оборотов при полной нагрузке может быть больше, чем при холостом ходе, не подвергая опасности устойчивость регулирования.[10]

При этом необходимо отметить, что при маленькой или отрицательной результирующей статической перестановочной силе рост сил инерции обусловливает соответствующий рост инерционных масс. В этом случае, однако, продолжительность колебаний будет больше, и скорость двигателя на пути от A к C растет значительнее, чем в других случаях.

Для составления аналитических выражений условий устойчивости целесообразно перейти от приведенных сил к моментам и от приведенных масс — к соответствующим моментам инерции относительно осей вращения. С этой целью обозначим:

I_s — момент инерции вращающихся масс двигателя;

$\mathfrak{M}_m$ — наибольший момент сил;

$\mathfrak{M}_a$ — излишек движущего момента над моментом нагрузки в положении A;

θ_a — угол отклонения инерционного маятника от положения равновесия C до A;

δ — неравномерность;

θ_r — наибольшее отклонение маятника;

$\delta_1 = \frac{\theta_a}{\theta_r}\delta$ — разность скоростей в положениях C и A в долях скорости ω_0;

$\mathfrak{M}_0$ — момент давления пружин относительно центра вращения маятника в положении C; этот момент считается постоянным, равным его среднему зна-

чению для всего (предполагаемого малым) отклонения AB;

$\mathfrak{M} = k\frac{d\theta}{dt}$ — момент сил торможения (масляного катаракта) относительно центра вращения маятника.

Момент $\mathfrak{M}_0$ должен действовать извне на маятник покоящегося регулятора с тем, чтобы компенсировать упругую силу и удерживать маятник в равновесии; назовем его „статическим“ моментом.

Согласно правилам Laskus и Lang*, перестанавливающий момент $\mathfrak{M}_c$, относящийся к положению D, равен произведению статического момента, определенного относительно D, и удвоенного избытка относительной скорости $\frac{d_1d_2}{d_0d_1}$. Приближенно $\mathfrak{M}_c=2\frac{d_1d_2}{d_0d_1}\mathfrak{M}_0$, так как, согласно обозначениям на фиг. 6,

$$d_1d_2 = d_1d + d_1d_2;\quad dd_1 = \frac{\theta}{\theta_r}\delta;\quad dd_2 = \omega - \omega_0.$$

Отсюда следует указанное ранее разложение на статическую и динамическую перестановочные силы или на соответствующие моменты.

В частности, $DD_1 = 2\delta\frac{\theta}{\theta_2}\mathfrak{M}_0$.

Вторая часть перестановочного момента $D_1D_3 = I'\left(\frac{d\omega}{dt}\right)_D$.

Для масс двигателя имеет место уравнение:

$$I_s\frac{d\omega}{dt} = \Delta\mathfrak{M} = \frac{\theta}{\theta_r}\mathfrak{M}_m, \tag{6}$$

откуда в положении D угловое ускорение или, в конечном итоге, смещающий момент, равняется:]

$$DD_3 = 2\delta\frac{\theta}{\theta_r}\mathfrak{M}_0 + \frac{I'}{I_s}\frac{\mathfrak{M}_m}{\theta_r}\theta = a\theta, \tag{7}$$

* Об общности этих правил см. „Schweiz. Bauzeitung“, 1894, Bd. XXII, № 17 и 18.

если через a обозначить множитель

$$a = 2\frac{\delta}{\theta_r}\mathfrak{M}_0 + \frac{I'}{I_s}\frac{\mathfrak{M}_m}{\theta_r}. \quad (7a)$$

Так как для границы устойчивости динамический момент как раз уравновешивается действием катаракта, то уравнение движения инерционного маятника имеет вид:

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -a\theta, \quad (8)$$

откуда получается известное выражение гармонического колебания $\theta = \theta_a \cos kt$, причем

$$\frac{d\theta}{dt} = -k\theta_a \sin kt; \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = -k^2\theta \quad \text{и} \quad k^2 = \frac{a}{I}. \quad (9)$$

Изменения других величин будут, как указано, синусоидальными функциями того же периода; в частности,

$$\Delta\mathfrak{M} = \Delta\mathfrak{M}_a \cos kt. \quad (10)$$

Отсюда следует с учетом уравнения (6)

$$I_s(\omega - \omega_0) = \frac{\Delta\mathfrak{M}_a}{k}\sin kt,$$

а прирост скорости $\Delta\omega$ в точке C равен

$$\Delta\omega = \frac{\Delta\mathfrak{M}_a}{I_s k} = \frac{\mathfrak{M}_m\theta_a}{I_s k\theta_r}. \quad (11)$$

Перестанавливающий момент в точке C равен

$$\mathfrak{M}_{ec} = 2\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\mathfrak{M}_0 = 2\frac{\mathfrak{M}_m\mathfrak{M}_0\theta_a}{I_s\omega_0\theta_r k}.$$

Момент силы сопротивления катаракта относительно той же точки

$$\mathfrak{M}_{bc} = K\left(\frac{d\theta}{dt}\right) = Kk\theta_a.$$

Условие устойчивости требует

$$\mathfrak{M}_{bc} > \mathfrak{M}_{ec}.$$

Подставляя указанные выше значения, находим:

$$k > \frac{2\mathfrak{M}_m \mathfrak{M}_0}{I_s K \omega_0 \theta_r}.$$

Используя уравнения (9) и (7), получим:

$$\left(\frac{K\theta_r}{2\mathfrak{M}_0}\right)\left[\delta\left(\frac{I_s\omega_0}{\mathfrak{M}_m}\right) + \left(\frac{I'\omega_0}{2\mathfrak{M}_0}\right)\right] \geqslant \left(\frac{I\theta_r}{2\mathfrak{M}_0}\right). \qquad (12)$$

Величины, заключенные в круглые скобки, имеют простое физическое значение и в связи с дальнейшим изложением нуждаются в специальных обозначениях. Пусть[11] $T_0 = \frac{I_s\omega_0}{\mathfrak{M}_m}$ является временем, в течение которого момент $\mathfrak{M}_m$ должен действовать на вращающиеся массы двигателя, чтобы изменить их скорость от 0 до ω_0; T_0 может быть названо временем разбега. Если написать формулу в виде $\frac{1}{2} T_0 = \frac{1}{2} \frac{I_s\omega_0^2}{\mathfrak{M}_m\omega_0}$, то видно, что $\frac{1}{2} T_0$ представляет собой отношение кинетической энергии вращающихся масс к секундной работе. $T^2 = \frac{I\theta_r}{2\mathfrak{M}_0}$, откуда $\theta_r = \frac{\mathfrak{M}_0}{I}\frac{(2T)^2}{2}$. Таким образом, $2T$ есть время, в течение которого отклонение маятника регулятора под действием момента $\mathfrak{M}_0$ уменьшается на угол θ_r; $2T$ можно назвать временем „падения“ регулятора; $T' = \frac{K\theta_r}{2\mathfrak{M}_0}$, откуда $\theta_r = \frac{\mathfrak{M}_0}{K}(2T')$. Здесь $\frac{\mathfrak{M}_0}{K}$ — угловая скорость, которую создает момент $\mathfrak{M}_0$, преодолевающий сопротивление катаракта; $2T'$ есть время, необходимое для уничтожения отклонения θ_r при этой скорости. Его можно назвать „временем падения катаракта“

$$T'' = \frac{I\omega_0}{2\mathfrak{M}_0} \text{ или } \omega_0 = \frac{\mathfrak{M}_0}{I'}(2T'').$$

Здесь $2T''$ — время, в течение которого под действием момента $\mathfrak{M}_0$ инерционные массы регулятора ускоряются от 0 до ω_0; время $2T''$ в некотором смысле представляет собой „время разбега инерционных масс“.

В этих обозначениях условие (12) запишется так: [12]

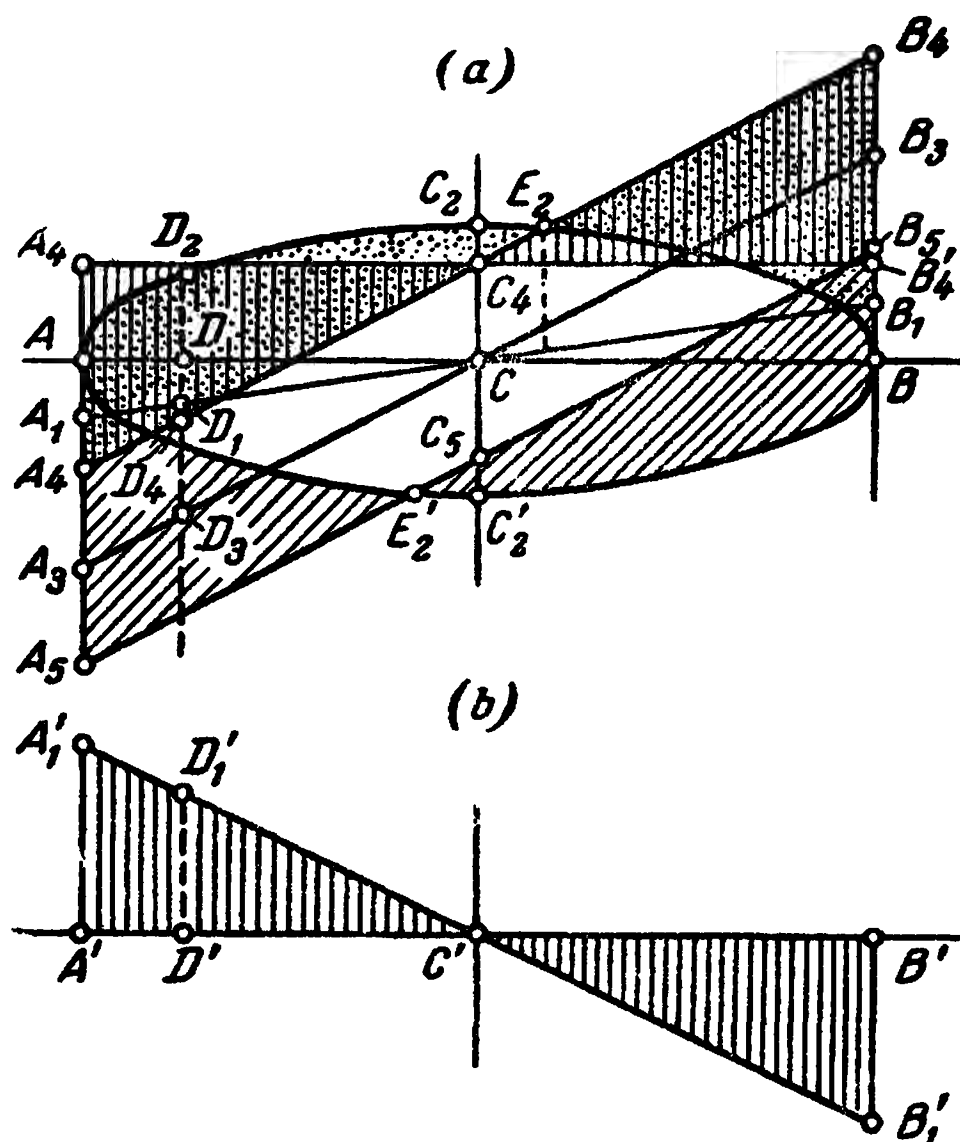
$$T'(\delta T_0 + T'') \geqslant T^2. \tag{12a}$$

Отсюда следует, что устойчивость можно получить также при отрицательном δ, т. е. при неустойчивом регуляторе, если допустить соответствующее увеличение инерционной массы (T'') и действия катаракта (T'). Отсюда также найдем, что если пренебречь действием тангенциальных сил инерции, т. е. если считать $T''=0$, то устойчивость потребует статического регулятора ($\delta > 0$), и в этом случае необходимо иметь катаракт или „затухание“, т. е. $T' > 0$. Эти результаты для обычных регуляторов были получены другим путем Вышнеградским еще в 1877 г.,* однако его теория встречала много сомнений, подкрепленных ссылками на большое число регуляторов, хорошо действующих без катарактов. При этом сомневающиеся совершенно упускали из виду, что в этих регуляторах или в их перестановочных органах всегда имеется известное трение, которое при возникно-

* Civilingenieur, 1877 г., стр. 95. Вышнеградский применяет теорию малых колебаний к движению регулятора и получает в результате исследования корней уравнения третьей степени условие устойчивости, которое является частным случаем только что выведенной формулы (12а). Вывод, данный в тексте, для получения которого не требуется предварительной вычислительной работы, связанной с анализом дифференциальных уравнений, является, однако, вполне строгим, как и выводы, обычно приводимые в учебниках механики, и представляет собой некоторый интерес. Теория малых колебаний, впрочем, доведена в аналитической механике до высокой степени точности особенно в учебнике Раута „Динамика системы твердых тел“ (Лейпциг, 1898). Так как в дальнейшем эта теория будет использована, то на указанные источники обращаем особое внимание.

вении колебаний поглощает живую силу массы регулятора, т. е., иначе говоря, вызывает затухание колебаний, и безусловно справедливым является правило, что в отсутствие трения регулирование невозможно, так как никогда при этом нельзя сделать исчезающе малыми массу или ход регулятора (T^2).

Конечно, соотношения станут гораздо сложнее даже в том простейшем случае, когда вместо катаракта действует постоянное (кулоновское) трение. Такое трение с достаточным приближением порождают, например, сочленения самого регулятора. На фиг. 7 перестановочная сила и движущая сила изображены по тому же способу, как ранее. В положении D действуют: сила инерции D_3D_1, статическая перестановочная сила D_1D, динамическая перестановочная сила DD_2 и в качестве сопротивления — постоянное трение D_3D_4. Свободные силы представлены ординатами площадей $A_4AC_2E_2D_4$ и $E_2BB_4E_2$; первая соответствует случаю укорочения точки регулятора, вторая — замедлению. При изменении направления движения в положении B трение также изменяет знак и „площадью ускорения“ будет $B_5BC_2'E_2'B_5$. Границей устойчивого регулирования можно считать состояние колебаний, при котором точка регулятора без конца колеблется взад и вперед между положениями A и



Фиг. 7

B и все другие величины соответственно также изменяются периодически. Приближенно условие возникновения такого периодического движения можно получить следующим образом.

Предположим, что $AC = CB$. Тогда на пути от A до B работы, выражаемые площадями AA_3C и CB_3B, взаимно компенсируются. Остается положительная работа AC_2B динамической перестановочной силы и отрицательная работа $A_4B_4B_3A_3 = AA'_4B'_4B$ силы трения. Регулятор выходит из состояния покоя в A, а в B его скорость опять становится равной нулю. Отсюда следует, что при наших предположениях площадь, выражающая работу трения, должна быть равна площади, выражающей работу динамической перестановочной силы.

Для того чтобы найти аналитическое выражение этого условия устойчивости, предположим, что кривая AC_2B приближенно является эллипсом, т. е. строго будем считать изменение скорости двигателя гармоническим (во всяком случае здесь в точке C_2 касательная горизонтальна).[13] Площадь половины эллипса равна $\frac{\pi}{2}\,\overline{AC}\cdot\overline{CC_2}$ и должна быть $< \overline{AB}\cdot\overline{CC_4}$, следовательно,

$$CC_4 > \frac{\pi}{4}\,CC_2. \tag{13}$$

Как и прежде, перестановочная сила

$$CC_2 = 2\,\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\,\mathfrak{M}_0.$$

CC_4 представляет собой перестановочную силу, необходимую для преодоления силы трения. Обозначим через $\Delta\omega'$ соответствующее изменение скорости, тогда

$$CC_4 = 2\,\frac{\Delta\omega'}{\omega_0}\,\mathfrak{M}_0.$$

В пределах $+\Delta\omega'$, $-\Delta\omega'$ регулятор нечувствителен. Если, как

обычно, определить нечувствительность при помощи частного

$$\varepsilon = 2\frac{\Delta\omega'}{\omega_0},$$

то

$$CC_4 = \varepsilon \mathfrak{M}_0.$$

Согласно (13), для устойчивости необходимо, чтобы

$$\varepsilon \mathfrak{M}_0 > \frac{\pi}{4} 2 \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \mathfrak{M}_0$$

или

$$\varepsilon > \frac{\pi}{2} \frac{\Delta\omega}{\omega_0}. \qquad (13a)$$

Чем больше перестановочная сила AA_4 по сравнению с CC_2, тем ближе движение регулятора приближается к гармоническому, тем в большей степени допустимо заменить площадь A_4AE_2 площадью треугольника $A_4A_4'C_4$. Тогда, однако, колебания массы регулятора будут идентичны с предыдущими, и, следовательно, для k^2 надо применить формулу (9), а для $\frac{\Delta\omega}{\omega_0}$ — формулу (11). Условие (13a) в этом случае будет выглядеть так:

$$\varepsilon > \frac{\pi}{2} \frac{\mathfrak{M}_m}{I_s\omega_0 k} \frac{\theta_a}{\theta_r}.$$

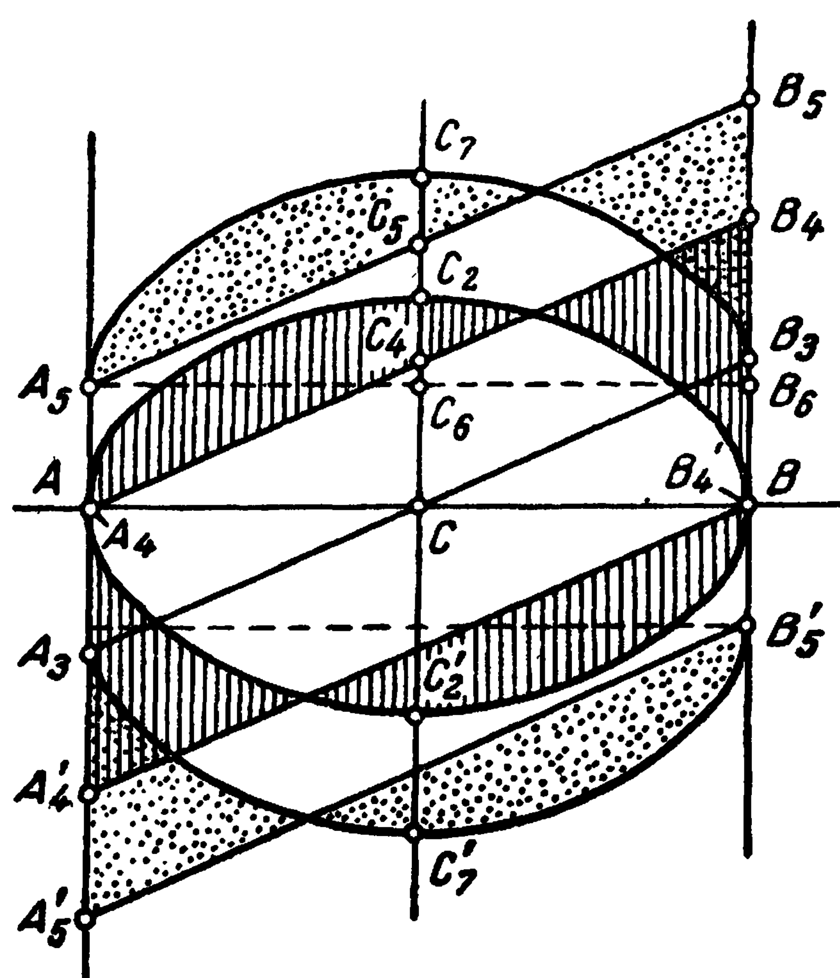
Введя обозначения, использованные в уравнении (12a (и возводя в квадрат, чтобы избегнуть неудобных корней), получим:

$$\varepsilon^2 > \frac{\pi^2}{4}\left(\frac{\theta_a}{\theta_r}\right)^2 \frac{T^2}{T_0(\delta T_0 + T'')}. \qquad (13b)$$

Действие инерционного маятника сделает возможным также и в этом случае применение астатического ($\delta = 0$) или неустойчивого ($\delta < 0$) регулятора.[14] Однако в то время как при применении катаракта в принципе есть возможность достигнуть

устойчивости процесса регулирования при любой неустойчивости регулятора, в данном случае существует граница, определяемая наименьшим наклоном линии A_3B_3.

Рассмотрим частный случай, когда A и A_4 совпадают (фиг. 8). В этом случае наименьшая необходимая нечувствительность равна неравномерности для рассматриваемых отклонений регулятора. Устойчивость как раз еще будет сохранена, т. е. работа трения $AB_4B_3A_3$ равна площади AC_2B. Если одновременно увеличим нечувствительность, а с ним и трение на величину A_3A_5, то движение регулятора перестанет быть непрерывным. Скорость двигателя должна сначала возрасти, пока динамическая перестановочная сила не достигнет значения AA_5; лишь тогда регулятор начинает двигаться. Характер движения, конечно, аналогичен тому, какой имелся в первом случае; скорость двигателя возрастает по тому же закону; динамическая перестановочная сила представляется кривой $A_5C_7B_6$, конгруентной с кривой AC_2B. Работа трения $A_3A_5B_5B_3$ равна и противоположна работе перестановочной силы $AA_5C_7B_6B$; регулятор в B останавливается. Здесь наступает некоторая пауза, пока скорость не уменьшится в другую сторону от ω_0 на величину, соответствующую отрезку AA_5, после чего та же картина повторяется при движении вниз.



Фиг. 8

Если хотят теперь, так как нечувствительность больше необходимой, уменьшить неравномерность (иначе—увеличить не-

устойчивость), то следует при прочих равных условиях линию A_5B_5 повернуть около C_5 на малый угол вниз относительно AB. Точка A_6 и кривая $A_5C_7B_6$ сместятся вверх, в связи с чем работа, производимая динамической перестановочной силой на пути AB, станет больше работы трения. В результате движение продолжится за B, и амплитуда будет увеличиваться от размаха к размаху, и притом тем больше, чем больше период колебания; следовательно, и прирост скорости C_6C_7 будет также значительнее, чем прежде. Таким образом мы видим, что состояние, при котором трение, необходимое для достижения устойчивости, как раз равно перестановочной силе AA_3, образует границу для допустимого наклона силовой линии A_3B_3. Попрежнему

$$CC_4 = AA_3 = \varepsilon\mathfrak{M}_0$$

и сумма статической перестановочной силы и сил инерции по уравнениям (7) и (7a) равна:

$$AA_3 = a\theta a = 2\delta \frac{\theta_a}{\theta_r} \mathfrak{M}_0 + \frac{I'}{I_s} \mathfrak{M}_m \frac{\theta_a}{\theta_r}.$$

Подставив значение этих величин, получим:

$$\varepsilon = 2\frac{\theta_a}{\theta_r}\left[\delta + \frac{I'\mathfrak{M}_m}{I_s 2\mathfrak{M}_0}\right] = 2\frac{\theta_a}{\theta_r}\left[\delta + \frac{T''}{T_0}\right].$$

ε должно также удовлетворять условию устойчивости (13a), следовательно,

$$2\frac{\theta_a}{\theta_r}\left[\delta + \frac{T''}{T_0}\right] = \frac{\pi}{2}\frac{\theta_a}{\theta_r}\frac{T}{T_0\sqrt{\delta + \frac{T''}{T_0}}},$$

откуда получим:

$$\delta + \frac{T''}{T_0}\sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2\frac{T^2}{T_0^2}} = 0.85\sqrt{\frac{T^2}{T_0^2}}. \qquad (14)$$

Если δ и $\frac{T''}{T_0}$ выбраны меньшими, чем это соответствует данному уравнению, то устойчивое регулирование (при постоянном трении в качестве тормозящей силы) невозможно. Если действие инерции отсутствует, то формула определяет наименьшую неравномерность, которая должна быть выбрана.

В наших обозначениях для этого случая будем иметь*:

$$\delta_{min} = 0.85 \sqrt[3]{\frac{T^2}{T_0^2}}. \qquad (15)$$

---

* Соотношение подобного рода для обычного регулятора выведено *J. E. Begtrup* в *American Mashinist* от 1 марта 1894 г. Измеряя длину в метрах и используя те же основные величины, что и в тексте, получим его формулу в виде:

$$\delta_{min} = 1.20 \sqrt[3]{\frac{T^2}{T_0^2}}.$$

Позднее *M. Tolle* в Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure (1895; стр. 1498) дал совершенно аналогичную формулу, которая после второстепенных исправлений, сделанных R. Knoller в Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure (1897 г., стр. 415), имеет вид:

$$\delta_{min} = 0.76 \sqrt{\frac{T^2}{T_0^2}}.$$

Begtrup сообщает, что его коэффициент, полученный в результате исследования решения известных дифференциальных уравнений проблемы регулирования, для безопасности был им выбран несколько бо́льшим, чем фактически дали вычисления. Рассматриваемый коэффициент следует соответственно этому положить равным единице. Вопреки предложению использовать $\sqrt[3]{T^2}$ ($= \delta_r$ в обозначениях Knoller) как меру качества регулятора, автор указывает на физическое значение самого T и предлагает принимать эту величину за такую меру.

НАИБОЛЬШЕЕ ИЗМЕНЕНИЕ СКОРОСТИ

Устойчивость является тем необходимым условием, которому, в первую очередь, должен удовлетворять регулятор, однако это условие не является достаточным. Кроме этого условия требуется, чтобы максимальное изменение скорости, возникающее во время переходного процесса, не превосходило определенных границ, зависящих от изменения нагрузки. Так, у новых силовых установок при изменении нагрузки на 30% (от наибольшей мощности) для изменения скорости обычно гарантируют в качестве предельного значения 3%. Часто также приходится обращать внимание на быстроту изменений скорости; например, вспышка света продолжительностью в несколько секунд даже при малых абсолютных значениях будет восприниматься значительно неприятнее, чем в случае, если эта вспышка продолжается минуты.

Определение величины наибольшей угловой скорости, достигаемой за время переходного процесса, требует решения дифференциальных уравнений движения. Это известное решение здесь коротко рассмотрено и (насколько это известно автору — впервые) использовано для вычисления таблиц, при помощи которых для каждого случая практики можно быстро определить интересующее наибольшее значение угловой скорости.

На массы регулятора действуют силы инерции, именно: центробежные силы с моментом $\mathfrak{M}_f$, тангенциальные силы инерции с моментом $\mathfrak{M}_g$, момент со стороны пружины $\mathfrak{M}_t$, момент со стороны катаракта $\mathfrak{M}_b$, момент сил трения в сочленениях самого регулятора $\mathfrak{M}_r$ и момент реакции давления от распределительного механизма $\mathfrak{M}_s$. Последний содержит постоянную часть, которую необходимо учитывать при расчете пружин, и периодическую часть, которая у обычных плоских регуляторов достаточно велика, чтобы вызвать непрекращаю-

щиеся периодические колебания* маятника регулятора около положения равновесия. Эти колебания приводят к тому, что регулятор может следовать за малейшим усилием, изменяющим среднее положение равновесия. Понятие нечувствительности в обычном смысле к этим регуляторам неприменимо. Действие постоянного собственного трения в этом случае скажется некоторым замедлением движения ммятника; здесь оно приближается значительно ближе к действию катаракта, чем в обычных регуляторах**. В этом случае отклонение отсчитывается от „среднего положения равновесия", и мы можем пренебречь моментами $\mathfrak{M}_r$ и $\mathfrak{M}_s$.

---

* Если в каком-нибудь частном случае потребуется эти колебания определить точно, то следует воспользоваться уравнением $I \frac{d^2\theta}{dt^2}$ = *периодическому моменту*. Его решение будет особенно наглядным, если обратить внимание, что это уравнение имеет ту же форму, что и приближенное дифференциальное уравнение гибкой нерастяжимой нити, для которой I означает горизонтальное натяжение, θ — провисание, момент — нагрузку, время — абсциссу. Также можно провести аналогию с изгибом прямой балки. Наконец, θ можно очень просто определить графическим путем из „веревочного многоугольника" (см. исследование O. Schneider, Z. d. VDI. 1895, стр. 1256).

** Этот результат легко проследить аналитически на простейшем примере материальной точки m, на которую действует постоянная (по величине), но изменяющая свое направление через каждые t сек. сила P, которая должна преодолевать при движении (прямолинейном) трение R. Если P существенно больше R, то возникает колебательное движение с размахом колебаний $\frac{Pt^2}{4m}$. Если допустить, что на материальную точку действует еще постоянная, не изменяющая своего направления сила Q, то размах колебаний возрастает в направлении Q и уменьшается в противоположном направлении. Среднее положение материальной точки смещается и устанавливается, если $Q<R$, „средняя" скорость $V=2RmPtQ$. Так как в отсутствии P материальная точка не сможет двигаться под действием одной силы Q, ибо последняя принята $<R$, то объединенное действие P и R определяет скорость, которая пропорциональна действующей силе, как и в случае катаракта. Если $Q>R$, то „средняя"

Обозначим соответственно:

θ — угол отклонения маятника регулятора от заданного начального положения,

ω_0 — начальная угловая скорость.

Уравнения движения получим из принципа работы, согласно которому прирост кинетической энергии равен совершенной над системой работе. Пусть ω_r будет относительной угловой скоростью инерционного маятника, $\frac{1}{2} I \omega_r^2$ — его кинетической энергией. Прирост $I\omega_r \delta\omega_r + \frac{1}{2} \omega_r^2 \delta I$ должен равняться элементарной работе $\Sigma \mathfrak{M} \omega_r \delta t$. Приняв, что приведенный момент инерции I неизменен, получим:

$$I \frac{d\omega_r}{dt} = I \frac{d^2\theta}{dt^2} = \mathfrak{M}_f + \mathfrak{M}_g + \mathfrak{M}_i + \mathfrak{M}_b. \tag{16}$$

Для масс машины следует рассматривать движущий момент $\mathfrak{M}_p$ и момент сопротивления $\mathfrak{M}_q$. Первый является величиной изменяющейся, так что приходится выделять постоянную часть, зависящую от положения регулятора, и периодическую часть, поддерживающую колебания инерционного маятника регулятора. В связи с этим угловая скорость будет испытывать периодические изменения, причем эти изменения скорости будут тем менее заметны, чем будет больше число оборотов машины.

скорость непрерывно растет и вычисляется так, как будто P отсутствует. У регулятора P заменено реакцией давления распределительного механизма и возникающим из-за переменной части движущего момента моментом сил инерции; R соответствует собственному трению, Q — перестановочной силе.

Вблизи положения равновесия (или при малых изменениях нагрузки) перестановочная сила будет меньше собственного кулоновского трения регулятора, поэтому влияние последнего по предыдущему совпадает с действием катаракта. Здесь нельзя рассчитывать с помощью постоянного трения осуществить желательную иногда полную остановку регулятора.

Среди других аналогичных обстоятельств можно также пренебречь разрывностью, которая заключается в том, что регулятор должен ждать возможности изменить движущий момент от одного наполнения до другого. Наконец, в многоцилиндровых машинах не рассматривается явление запаздывания, связанное с накапливанием пара в междукамерных паропроводах.

Отсюда следует уравнение *

$$I_s \frac{d\omega}{dt} = \mathfrak{M}_p - \mathfrak{M}_q. \tag{17}$$

* Нельзя пренебрегать большими инерционными массами по сравнению с остальными вращающимися массами двигателя, ибо они будут оказывать обратное воздействие на ход двигателя, и интересно выяснить, как можно это воздействие учесть. На фиг. 9 B является главной инерционной массой, по сравнению с которой прочие массы могут быть оставлены без внимания. Для того чтобы определить вращательное движение системы, состоящей из I_s (в прежних обозначениях) и массы B под действием момента $\mathfrak{M}_k$, лучше всего прибегнуть к закону моментов количества движения в форме Ф. Клейна. Составляют сумму моментов количества движения всех материальных элементов, относительно оси вращения, причем количество движения $\Delta m v$ рассматривают как силу, действующую на элемент Δm в направлении v. По указанному закону прирост момента количества движения за элементарное время равен произведению приложенного к системе момента сил на время dt. Момент количества движения жестко связанных с главной осью вращающихся масс

Фиг. 9

$$\Sigma \Delta m r \omega r = \Sigma \Delta m r^2 \omega = I_s \omega.$$

Чтобы найти момент количества движения для колеблющейся инерционной массы B, необходимо обратить внимание на то, что последняя

Обозначим через ω_g равновесную скорость при (определенном, как и выше) отклонении θ регулятора. Момент центробежных сил равен (в обозначениях фиг. 2)

$$\mathfrak{M}_f = Mey\omega^2.$$

Момент, действующий со стороны пружины в том же положении, равен моменту центробежной силы для равновесной скорости, т. е.

$$\mathfrak{M}_i = - Mey\omega_g^2.$$

одновременно вращается около главной оси O и участвует в относительном вращении около O_1. Поэтому точка P имеет скорость $r\omega$ и $\rho\omega_r$ и количество движения массы Δm маятника B является результирующей нанесенных на фиг. 9 векторов $\Delta m r\omega$ и $\Delta m \rho\omega_r$. Для нахождения момента этого элементарного количества движения около оси O используем указанное выше правило для сложения сил инерции. Количества движения полностью подобны этим силам, так как они соответственно пропорциональны расстояниям r и ρ и действуют перпендикулярно к ним. Система элементарных количеств движения $\Delta m r\omega$ дает таким образом приложенную к центру тяжести результирующую $Mr_0\omega$ и вращающий момент (в направлении ω) $I_0\omega$; система элементарных количеств движения $\Delta\ \rho\omega_r$ аналогично дает результирующую $M\rho_0\omega_r$ и момент $I_0\omega_r$ в направлении ω_r. Суммарный момент количества движения относительно оси O равен:

$$\mathfrak{M}_w = I_0\omega + Mr_0^2\omega + M\rho_0 p_0\omega_r - I_0\omega_r + I_s\omega.$$

Значения букв указаны на фигуре. Предполагая для простоты, что центр тяжести совпадает с осью O_1, вокруг которой совершаются колебания, будем иметь $\rho_0 = 0$ и $r_0 = e = \text{const}$, и

$$\mathfrak{M}_w = [I_s + I_0 + Me^2]\,\omega - I_0\omega_r.$$

Если момент сил равен $\mathfrak{M}_k$, то, согласно закону момента количества движения,

$$d\mathfrak{M}_w = \mathfrak{M}_k dt \quad \text{или} \quad [I_s + I_0 + Me^2]\frac{d\omega}{dt} - I_0\frac{d\omega_r}{dt} = \mathfrak{M}_k.$$

Это уравнение заменяет собой уравнение (8). Уравнение относительного движения остается неизменным. Легко составить условие устойчивости для этого случая. Если предположить, что инерционная масса так велика, что кроме вязкого трения катаракта (также очень сильного),

Но при заданной неравномерности δ

$$\omega_g = \omega_0\left(1 + \frac{\delta}{\theta_r}\theta\right).$$

Поскольку отклонение в течение всего движения предполагается малым, получим:

$$\mathfrak{M}_f + \mathfrak{M}_i = 2Mey\omega_0^2\left\{\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} - \delta\frac{\theta}{\theta_r}\right\}. \qquad (18)$$

Вначале $\mathfrak{M}_{p0} = \mathfrak{M}_{q0}$ и $\mathfrak{M}_{q0}$ внезапно изменяется до меньшей и остающейся постоянной величины $\mathfrak{M}_q$. Тогда, согласно фиг. 6, в случае линейной зависимости силы от отклонения θ (отсчитанного от начального положения) получим:

$$\mathfrak{M}_p = \mathfrak{M}_q = +(\mathfrak{M}_{q0} - \mathfrak{M}_q) - \mathfrak{M}_m\frac{\theta}{\theta_r}.$$

Подставляем это значение в уравнения (16) и (17):

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = 2Mey\omega_0^2\left[\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} - \delta\frac{\theta}{\theta_r}\right] + I'\frac{d\omega}{dt} - K\frac{d\theta}{dt}; \qquad (16a)$$

$$I_s\frac{d\omega}{dt} = (\mathfrak{M}_{q0} - \mathfrak{M}_q) - \mathfrak{M}_m\frac{\theta}{\theta_r}. \qquad (17a)$$

всеми остальными силами можно пренебречь, то можно доказать, что сходимость колебаний меньше, чем в случае, когда не учитывают обратного влияния инерционных масс на вращение вала двигателя. Если, кроме того, затухания не было бы (идеальный случай регулирования по принципу Сименсов в его чистом виде), то установились бы колебания с постоянной амплитудой.

Чтобы упростить эти уравнения, введем обозначения:

$$\left.\begin{aligned}
&\xi=\frac{\omega-\omega_0}{\omega_0} \text{ — относительное изменение угловой скорости (в долях начального значения);}\\
&\eta=\frac{\theta}{\theta_r} \text{ — относительный ход регулятора (в долях полного хода);}\\
&\Delta=\frac{\mathfrak{M}_{q_0}-\mathfrak{M}_q}{\mathfrak{M}_m} \text{ — относительное изменение нагрузки (в долях наибольшей мощности).}
\end{aligned}\right\} \quad (19)$$

Пусть далее

$$\mathfrak{M}_0=Mey\omega_0^2,$$

где, в связи с предположением о малости рассматриваемых отклонений маятника регулятора, под y понимается какое-нибудь постоянное среднее значение, например $y=y_0$, где y_0 — ордината центра тяжести начального положения. $\mathfrak{M}_g=I'\frac{d\omega}{dt}$, где момент инерции I' считается постоянным.

Если ввести эти обозначения и использованные ранее постоянные времени T_0, T, T', T'', то уравнения (16a) и (17a) примут форму:

$$T^2\frac{d^2\eta}{dt^2}=\xi-\delta\eta+T''\frac{d\xi}{dt}-T'\frac{d\eta}{dt}; \quad (20)$$

$$T_0\frac{d\xi}{dt}=\Delta-\eta. \quad (21)$$

Каждый член этого уравнения является просто числом. Целесообразность введения постоянных времени T* обусловливается как этой особенностью уравнений движения, так и их простым физическим смыслом. Конечные значения, кото-

* Автор подробно рассматривал введение этих постоянных в статье о регулировании турбин (см. настоящий сборник, стр. 109).

рые соответствуют новому состоянию равновесия (если последнее возможно), найдем из уравнений (20) и (21). Поскольку для состояния равновесия ξ и η постоянны,

$$\xi_e = \delta\Delta; \quad \eta_e = \Delta. \tag{22}$$

Положим

$$\xi = \xi_e + \xi'; \quad \eta = \eta_e + \eta' \tag{23}$$

и исключим η дифференцированием, одновременно введя вместо t новую переменную τ, определив ее соотношениями

$$\tau = \frac{t}{T_z}; \qquad T_z = \sqrt[3]{T_0 T^2}. \tag{24}$$

Тогда получим:[15]

$$\frac{d^3\xi'}{d\tau^3} + X\frac{d^2\xi'}{d\tau^2} + Y\frac{d\xi'}{d\tau} + \xi' = 0, \tag{25}$$

где

$$X = \frac{T'T_0}{T_z^2}; \quad Y = \left(\delta + \frac{T''}{T_0}\right)\frac{T_0}{T_z}. \tag{26}$$

Характер регулирования зависит от X и Y. Решение дифференциального уравнения (25) требует нахождения корней кубического уравнения

$$\varphi^3 + X\varphi^2 + Y\varphi + 1 = 0. \tag{27}$$

Это уравнение в большинстве практически интересных случаев имеет один действительный и два комплексных сопряженных корня:

$$\varphi_1 = \varphi_0, \quad \varphi_2 = U + iV, \quad \varphi_3 = U - iV.$$

Отсюда мы получим ξ' и, наконец, ξ:

$$\xi = \xi_e + \xi' = \delta\Delta + \lambda_0 e^{\varphi_0\tau} + [\mu\cos V\tau + \nu\sin V\tau]\, e^{U\tau}. \tag{28}$$

Постоянные λ_0, μ, ν определяются из начальных условий. Именно, для $t=0$: $\omega=\omega_0$, т. е. по (19) $\xi=0$; $\theta=0$, и поэтому $\eta=0$, т. е. по (21) $\frac{d\xi}{dt} = \frac{\Delta}{T_0}$; $\frac{d\theta}{dt} = 0$ и, следовательно,

$\frac{d\eta}{dt}=0$, т. е. снова по (21) $\frac{d^2\xi}{dt^2}=0$. Отсюда, так как при $t=0$, $\tau=0$ и так как $\frac{d\xi}{dt}=\frac{d\xi}{d\tau}\frac{d\tau}{dt}$, а $\frac{d^2\xi}{dt^2}=\frac{d^2\xi}{dt^2}\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2$, находим нужные начальные условия:

$$(\xi)_{\tau=0}=0;\quad \left(\frac{d\xi}{d\tau}\right)_{\tau=0}=\frac{T_z\Delta}{T_0};\quad \left(\frac{d^2\xi}{d^2\tau}\right)_{\tau=0}=0.$$

Таким образом получаются уравнения

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_0+\mu=-\delta\Delta,\\ &\lambda_0\varphi_0+U\mu+V\nu=\frac{T_z}{T_0}\Delta,\\ &\lambda_0\varphi_0^2+(U^2-V^2)\mu+2UV\nu=0.\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Регулятор пригоден, если и φ_0 и U отрицательны, так как тогда скорость стремится к предельному значению $\xi=\delta\Delta$ с затухающими колебаниями или вообще без колебаний. Это будет в том случае*, если

$$XY>1. \tag{30}$$

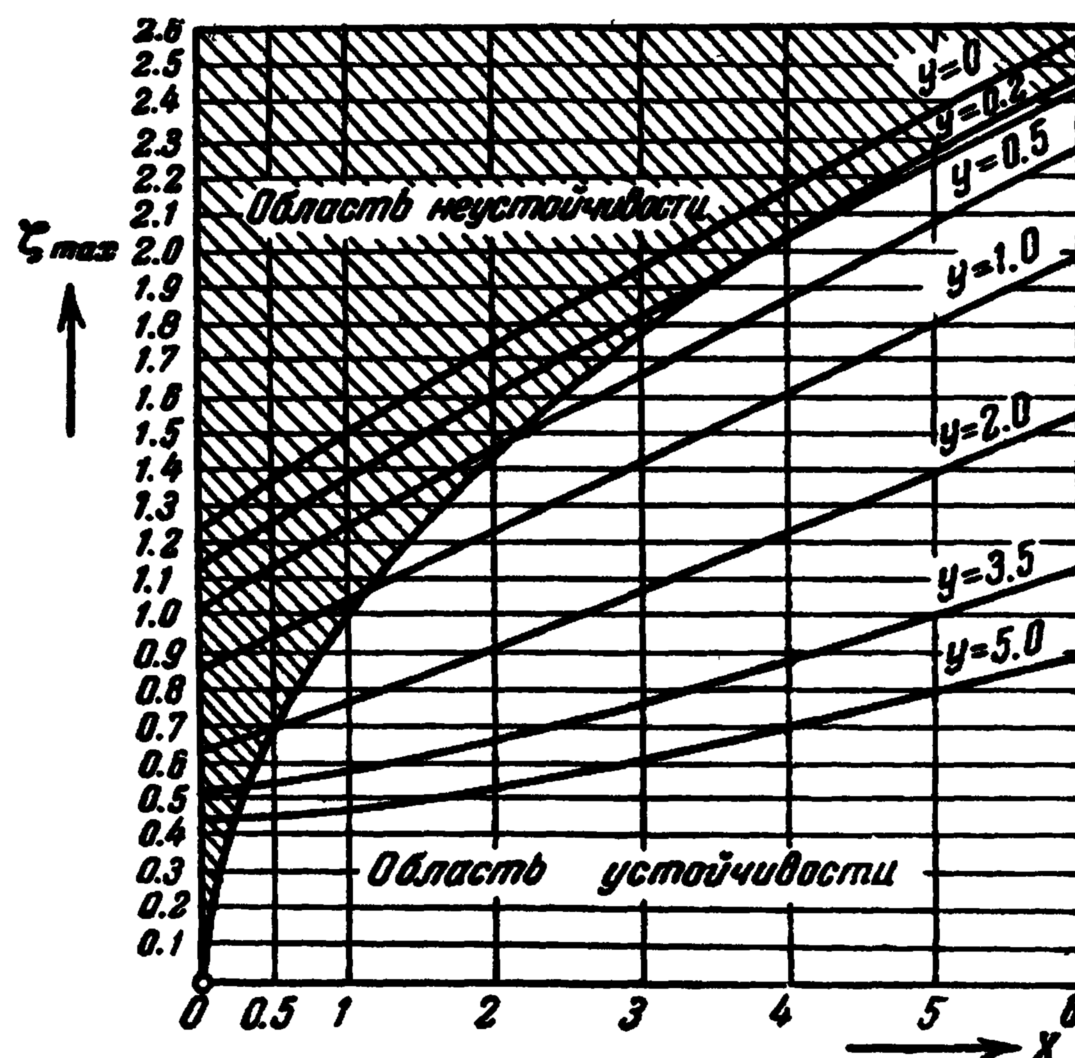
Если произведение $XY<1$, то колебания будут нарастать, равновесие будет невозможным. Соотношение (30) представляет поэтому условие устойчивости силовой установки. Записанное в коэффициентах T, оно выглядит так:

$$T'(\delta T_0+T'')>T^2, \tag{31}$$

т. е. полностью совпадает с ранее полученной формулой. Величину наибольшего изменения скорости получим из уравнения (28) по известным правилам нахождения максимума, т. е. путем дифференцирования, отыскания соответствующих значений τ и подстановки этих значений τ в (28). Уравнения (28) и (29) имеют ту особенность, что ξ пропорционально значе-

* Routh. Dynamik, II, § 289.

нию Δ, так как для λ_0, μ, ν из уравнения (29) получаются значения, пропорциональные Δ. Если еще предположить, что $\delta = 0$, то $\frac{T_z}{T_0}$ также становится общим множителем.



Фиг. 10

Вследствие того, что величины φ_0, U, V зависят лишь от X и Y, ξ в этом случае имеет вид:

$$\xi = \Delta \frac{T_z}{T_0} (\text{функция от } X, Y, \tau). \tag{32}$$

Если вместо ξ рассматривать переменную

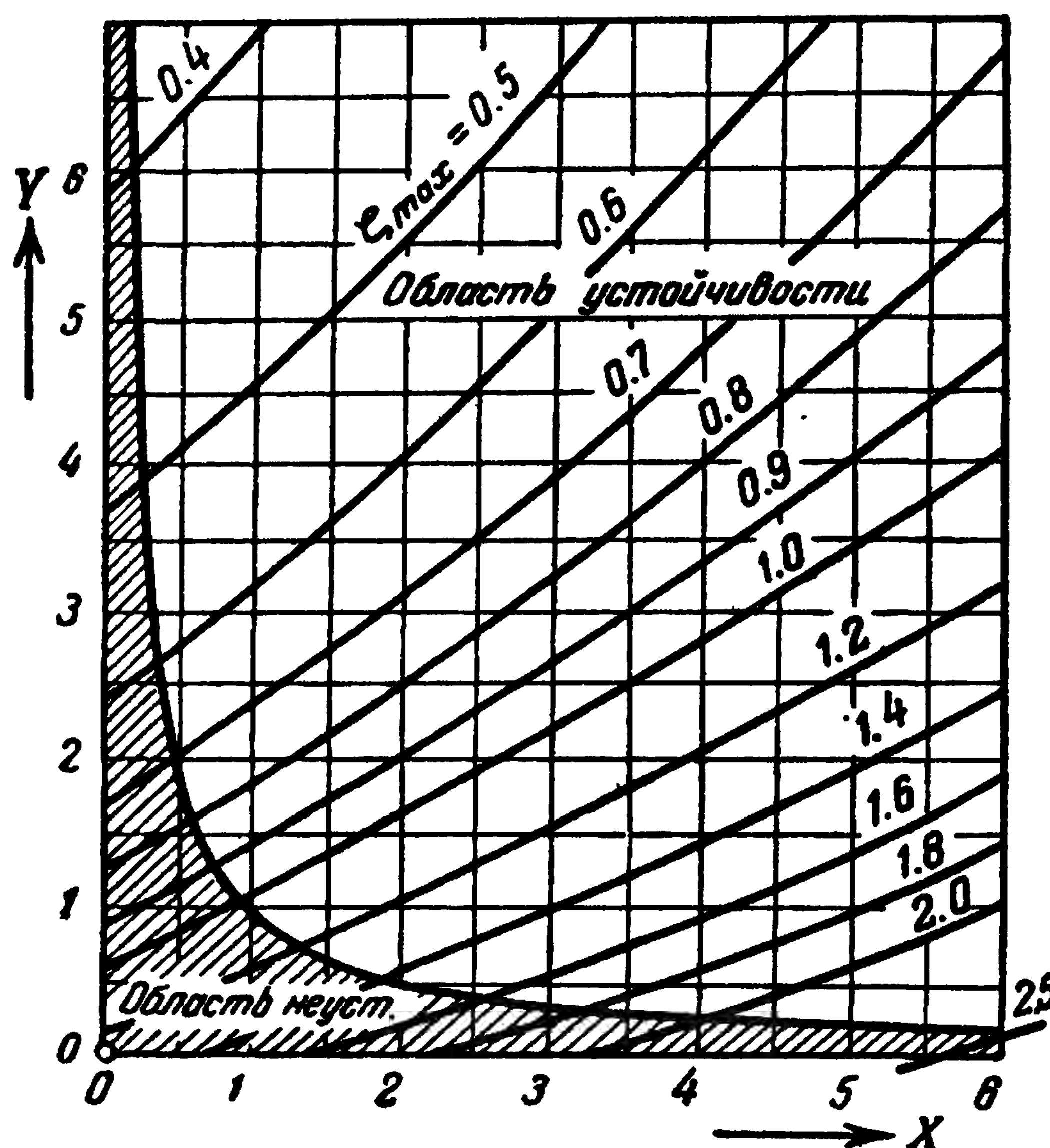
$$\zeta = \frac{T_0}{T_z} \frac{\xi}{\Delta}, \tag{33}$$

то последняя будет зависеть лишь от X, Y, τ. Следовательно

$$\zeta_{max} = \frac{T_0}{T_z} \frac{\xi_{max}}{\Delta} = \text{функции от } X, Y. \tag{34}$$

Таким образом, проблема сводится лишь к двум переменным;

это упрощение позволяет воспользоваться при дальнейшем рассмотрении величинами X и Y, которые следует назвать параметрами регулирования Вышнеградского.



Фиг. 11

Значения ζ_{max}, вычисленные для некоторых пар значений X, Y, были нанесены на фиг. 10 и 11. Промежуточные значения получены путем графической интерполяции, причем кривые нанесены не с очень большой точностью, так как вычисления необычайно трудоемки. Линии $Y=\text{const}$ на фиг. 10 так мало искривлены, что в пределах требуемой точности их можно заменить прямыми. Тогда получим относительно простое (эмпирическое) соотношение:

$$\zeta_{max}=\frac{1.95-0.18Y}{1.66+Y}+(0.21-0.027Y)X. \qquad (35)$$

ПРОЕКТИРОВАНИЕ РЕГУЛЯТОРА И ПРИМЕР ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ДИАГРАММ

Для машины произвольной мощности неравномерность хода может быть записана, как обычно, в форме частного

$$\delta_m = \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega_0},$$

где δ_m не следует смешивать с неравномерностью регулятора. Если воспользоваться этим обозначением, то для расчета маятника может быть составлена весьма наглядная формула. Пусть A — работа двигателя, приходящаяся на один его оборот, когда его мощность максимальна; ΔA — наибольший излишек работы пара над работой сопротивления, предполагаемого постоянным.

Отношение

$$\psi = \frac{\Delta A}{A} \tag{36}$$

можно назвать коэффициентом неравномерности силовой установки. Приращение живой силы, вызванное наличием ΔA, получается при переходе от дифференциала живой силы $I\omega d\omega$ к выражению, содержащему конечную разность

$$\Delta A = I\omega_0(\omega_{max} - \omega_{min}).$$

Если n_1 означает число оборотов в секунду, то

$$A = \frac{\mathfrak{M}_{pm}\omega_0}{n_1}.$$

Разделив одно уравнение на другое, получим:

$$\psi = \frac{\Delta A}{A} = \left(\frac{I\omega_0}{\mathfrak{M}_{pm}}\right)\left(\frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega_0}\right)n_1.$$

Первый множитель правой части является „временем разбега“ T_0, второй — неравномерностью хода машины δ_m. Определяя T_0, будем иметь:

$$T_0 = \frac{\psi}{\delta_m n_1}. \tag{37}$$

Значение коэффициента неравномерности ψ изменяется в пределах от 0.20 (для одноцилиндровой) до 0.04 (для трех-

цилиндровой машины) и может быть легко оценено. Время разбега, таким образом, можно определить, не вдаваясь в детали расчета.

При проектировании инерционного регулятора можно исходить, как у обычных плоских регуляторов, из „работоспособности", понимая под последней работу деформации (т. е. потенциальную энергию), которую запасает пружина при изменении угла поворота инерционного маятника от минимального до максимального значения (если имеется несколько пружин, то следует взять сумму деформаций всех пружин). Если P_m — среднее натяжение пружины, s — ее ход, т. е. удлинение или сжатие, то работоспособность равна $P_m s$ и может приближенно быть представлена как произведение среднего момента центробежных сил $\mathfrak{M}_0 = Mey_0\omega_0^2$ и полного угла отклонения инерционного маятника θ_0. Эту работоспособность следует, как обычно, сравнить с сопротивлением распределительного механизма. Пусть W — наибольшее значение этого сопротивления, отнесенное к эксцентрику, w — длина дуги линии центров на золотниковой диаграмме. Тогда потребная работоспособность должна выбираться в несколько раз большей, чем работа Ww, т. е. в соответствии с уравнением:

$$Ww = \varepsilon_0 P_m s = \varepsilon_0 \mathfrak{M}_0 \theta_0, \tag{38}$$

где ε_0 является величиной, аналогичной „нечувствительности" обычного регулятора, преодолевающего пассивное сопротивление. Для инерционного регулятора допустимы большие значения ε_0 — от 0.2 до 0.5 и даже до единицы.

Инерционный маятник или, точнее, его момент инерции выбирается в зависимости от параметров машины и должен быть взят не слишком большим; при этом для контроля можно воспользоваться выведенными выше формулами и по ним вычислить наибольшую скорость, возникающую при переходном процессе. Как быстро для астатического

инерционного регулятора можно провести последнее вычисление с помощью фиг. 10 и 11, покажем на примере.

Пусть регулятор состоит из центробежной массы A и отдельной инерционной массы B. Положим, $I_b = B\rho_b^2$ и выберем $\rho_b^2 = ey_0$. Пренебрегая инерционным действием A, малым по сравнению со значительно бо́льшим действием массы B, получим по уравнению (18):

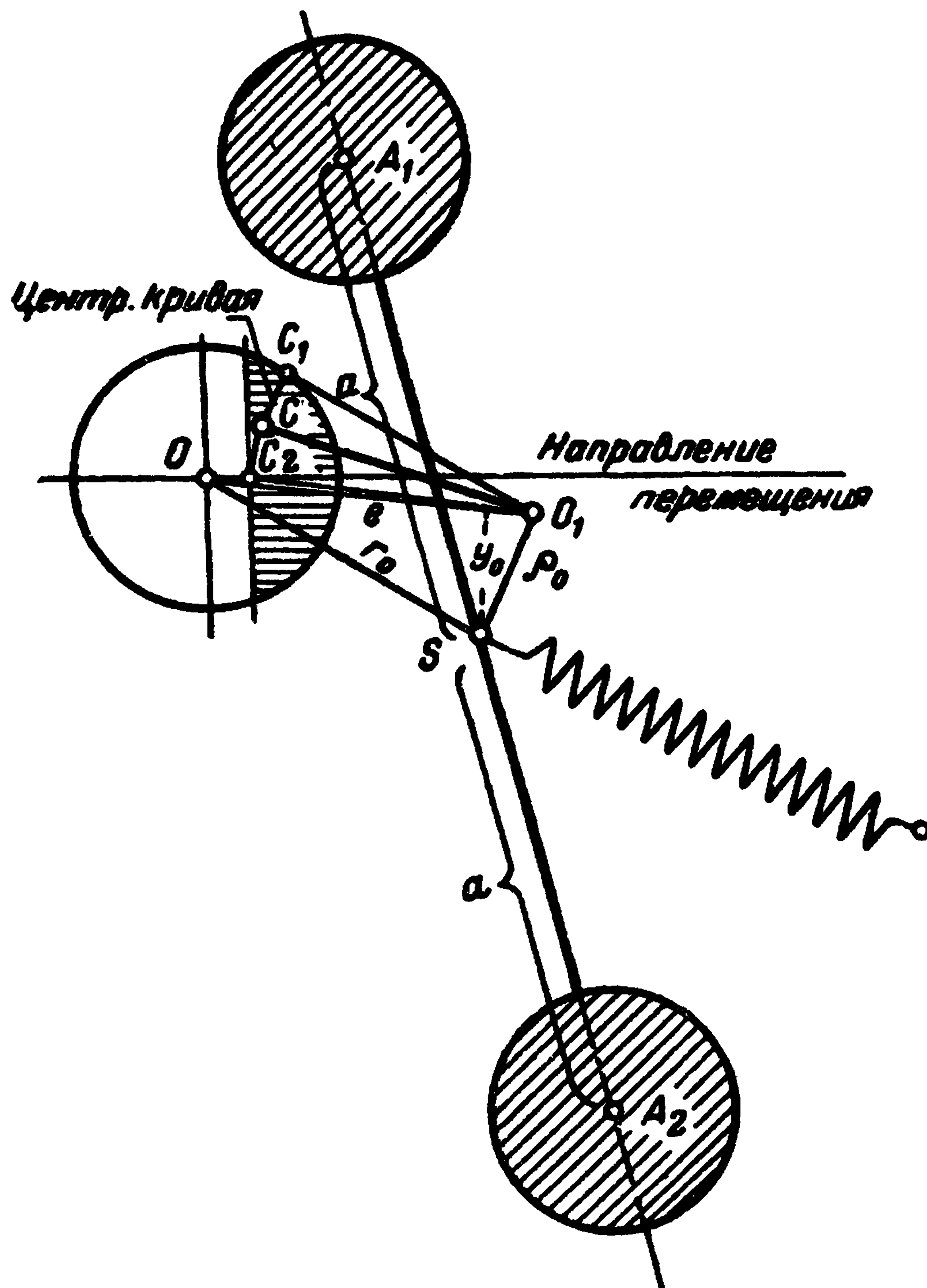
$$T'' = \frac{B}{2A\omega_0} \text{ и } T^2 \approx T_b^2 = \frac{B\theta_0}{2A\omega_0^2}.$$

Пусть, в частности, $\psi = 0.15$; $n_1 = 3$; $\omega_0 = 2\pi n_1 = 9.426$; $\delta_m = \frac{1}{200}$. Из уравнения (37) следует: $T_0 = 10$. Пусть далее $\frac{B}{A} = 25$, $\theta_0 = 24° = 0.419$. Тогда $T'' = 1.33$; $T^2 = 0.0591$; по уравнению (24) $T_z = \sqrt[3]{T_0 T^2} = 0.84$ и по уравнению (26) $Y = \frac{T_0'' T_0}{T_0 T_z} = \frac{T''}{T_z} = 1.58$. Отсюда, согласно фиг. 10, при выбранном для пробы $X = 2$ величина $\zeta_{max} \approx 1.0$, после чего по уравнению (34) $\xi_{max} = \frac{T_z}{T_0} \Delta\zeta_{max} = 0.084\Delta$. Если изменение нагрузки равно, например, 30% от наибольшей мощности, т. е. $\Delta = 0.30$, то $\xi_{max} = 0.0252$, относительная амплитуда колебания скорости будет равна $2\frac{1}{2}\%$ и регулятор можно считать пригодным, если принять во внимание сказанное выше по поводу действия сил собственного трения*.

Соединив инерционную массу с самим эксцентриком, получим устройство, показанное на фиг. 12; линия центров

* Из уравнения (26) следует: $T' = XT_0T_z^2$; отсюда можно вычислить необходимую силу катаракта. Величина его цилиндра обычно может быть произвольной, так как при помощи пропускного отверстия сопротивление можно регулировать как угодно. В исключительных случаях можно использовать следующие указания: при цилиндре диаметром 50 мм с 5-мм отверстием, суженным острым конусом, давление p ат пропор-

имеет кривизну, противоположную обычной, так как иначе силы инерции будут действовать в противоположную сторону. Эта конструкция дает возможность глубокого дросселирования пара при малых наполнениях, к чему, как известно, стремятся во многих новых установках с целью повысить как экономичность расходования пара, так и надежность регулирования. Если предположить, что массы обоих инерционных грузов A_1 и A_2 равны между собой и каждая из них равна m, то центр тяжести совпадает с точкой, лежащей посредине отрезка прямой, соединяющей центры



Фиг. 12

тяжести грузов. Работоспособность будет равна $2mey_0\omega_0^2\theta_0$ и требует при большом m лишь малых значений e и y_0. Приведенные моменты инерции $I = I_0 + 2m\rho_0^2$ и $I' = I_0 + 2mr_0v_0$

ционально скорости в наиболее узком сечении, т. е. $p = kv$, причем $k = \frac{1}{3} \cdot 6$ при наиболее узком сечении отверстия, равном 9.4 мм²; $k = \frac{1}{6} \cdot 9$ при сечении, равном 19.0 мм². Вообще говоря, как было замечено ранее, собственное трение до известной степени может заменить масляный катаракт.

приближено равны моменту инерции относительно центра тяжести, т. е. можно принять $I = I' = I_0 = 2ma^2$. Направление оси A_1A_2 безразлично. Если инерционный регулятор должен быть равноценен некоторому уже рассмотренному, то, зная работоспособность при заданных величинах ey_0, θ_0, ρ_0^2, определяют массу m и выбирают длину a так, чтобы получить тот же момент инерции, что и раньше, т. е. чтобы

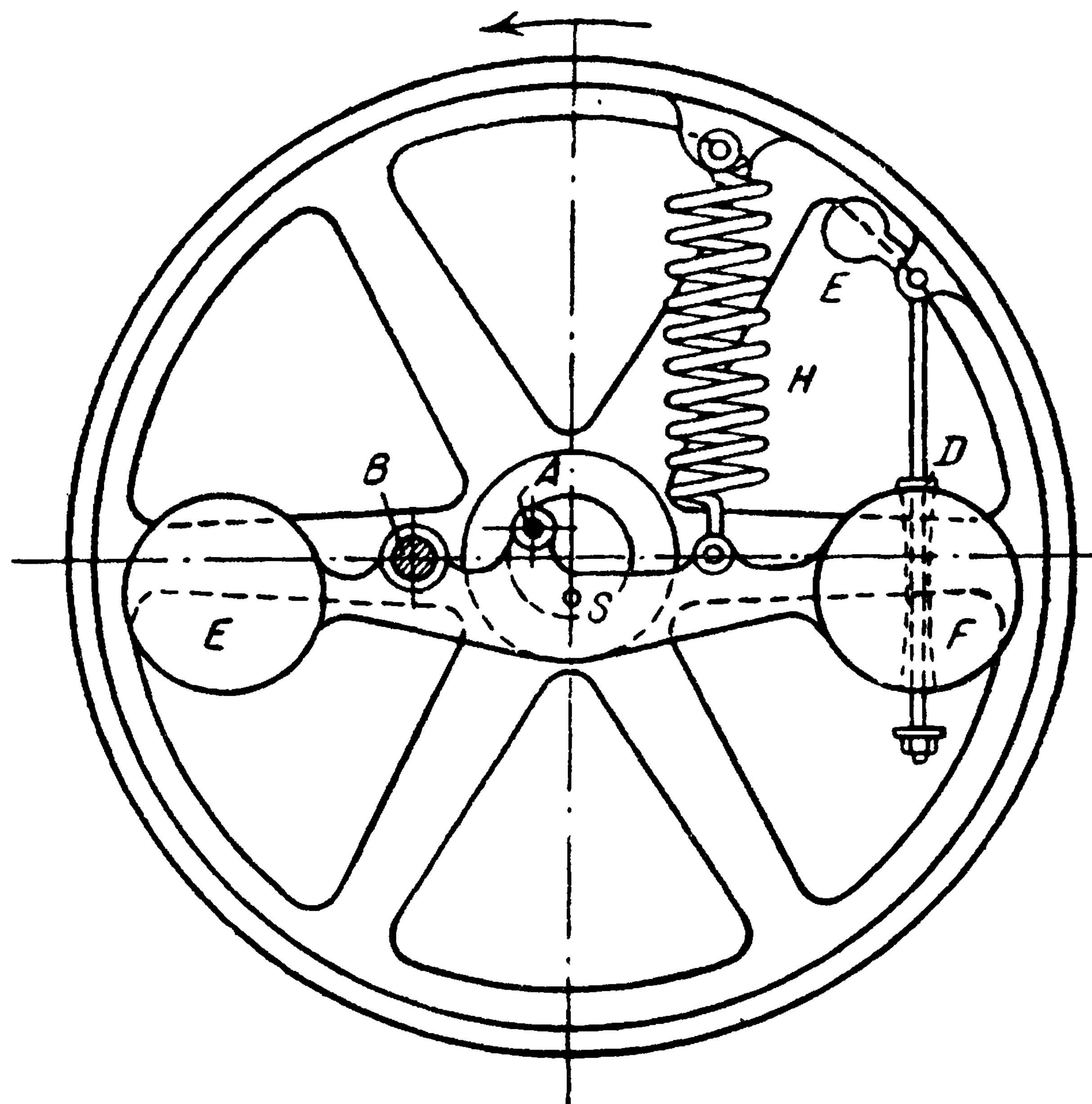
$$B\rho^2 = 2ma^2.$$

Вычисление коэффициентов T'', T^2 и т. д. аналогично предыдущему. Пружину следует располагать так, чтобы ось вращения центробежного маятника полностью или частично была разгружена от центробежной силы.

ОПИСАНИЕ АМЕРИКАНСКИХ И ЕВРОПЕЙСКИХ КОНСТРУКЦИЙ

Регулятор Эвена (I. Mc. Even, американский патент № 457246, 1894 г.) (фиг. 13) представляет инерционный маятник, соединенный с эксцентриком, и соответствует схеме фиг. 12; A — точка крепления эксцентриковой тяги, B — ось вращения инерционного маятника, по описанию установленная на шариковых подшипниках. Изобретатель подчеркивает, что центр тяжести S всегда лежит на одной стороне линии, проведенной через B и ось вала, что само собой разумеется, так как иначе получится неустойчивая точка; D — упор, уравновешенный противовесом E. С этим регулятором в основном совпадает *регулятор Ball Engine Co* (фиг. 14); отличие лишь в том, что здесь линия, соединяющая центры тяжести грузов инерционного маятника, расположена почти перпендикулярно к направлению перемещения цапфы золотника. Отсюда следует, что при симметричной внешней форме инерционного маятника по отношению к центру вала груз C_1 должен быть полым или оба груза должны быть полыми и залитыми не одинаковым количеством металла (например,

свинца). Это необходимо для того, чтобы центр тяжести S находился в таком положении относительно точки вращения B, что при увеличивающейся центробежной силе эксцентрик, смещаясь, уменьшал наполнение.

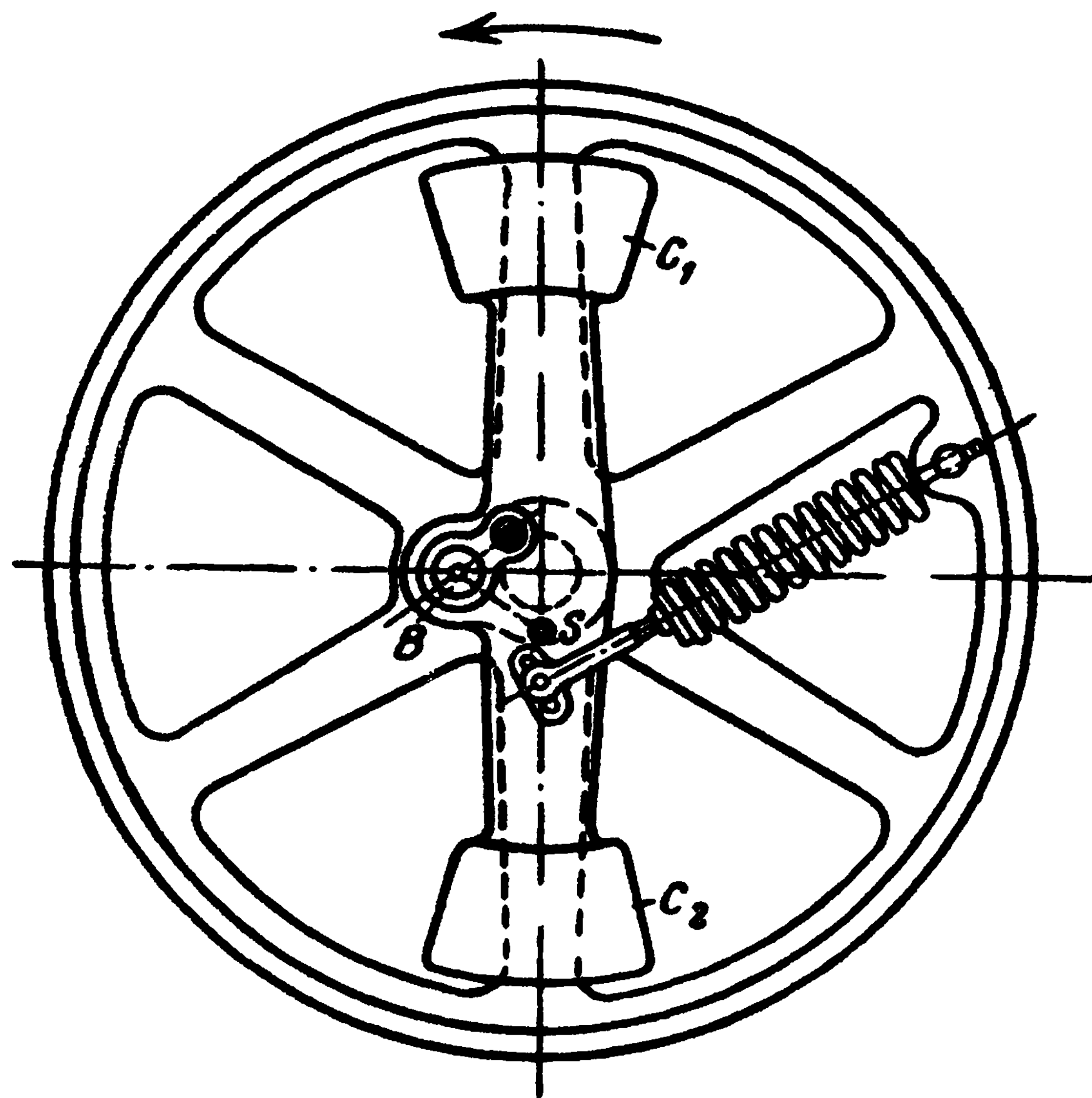


Фиг. 13

Линия центров расположена так же, как и в регуляторе Эвена. Для крепления пружины предусмотрены три отверстия, очевидно для того, чтобы можно было изменять число оборотов. Промежуточные значения можно легко получить изменением натяжения пружины.

Регулятор Вильбера Дениса (Wilber Denis, американский патент № 577291, 1896 г.) (фиг. 15) является примером нецелесообразного устройства. Инерционный маятник J свободно вращается на оси вала A и связан при помощи тяги G

с эксцентриком и тягой H с центробежным грузом F, имеющим неподвижный центр вращения в точке E. Центробежная сила, действующая на массу F и передающаяся на эксцентрик тягой H, в положении равновесия уравновешивается пружиной D. При выдвинутом далеко наружу положении центра тяжести это устройство позволяет лишь с



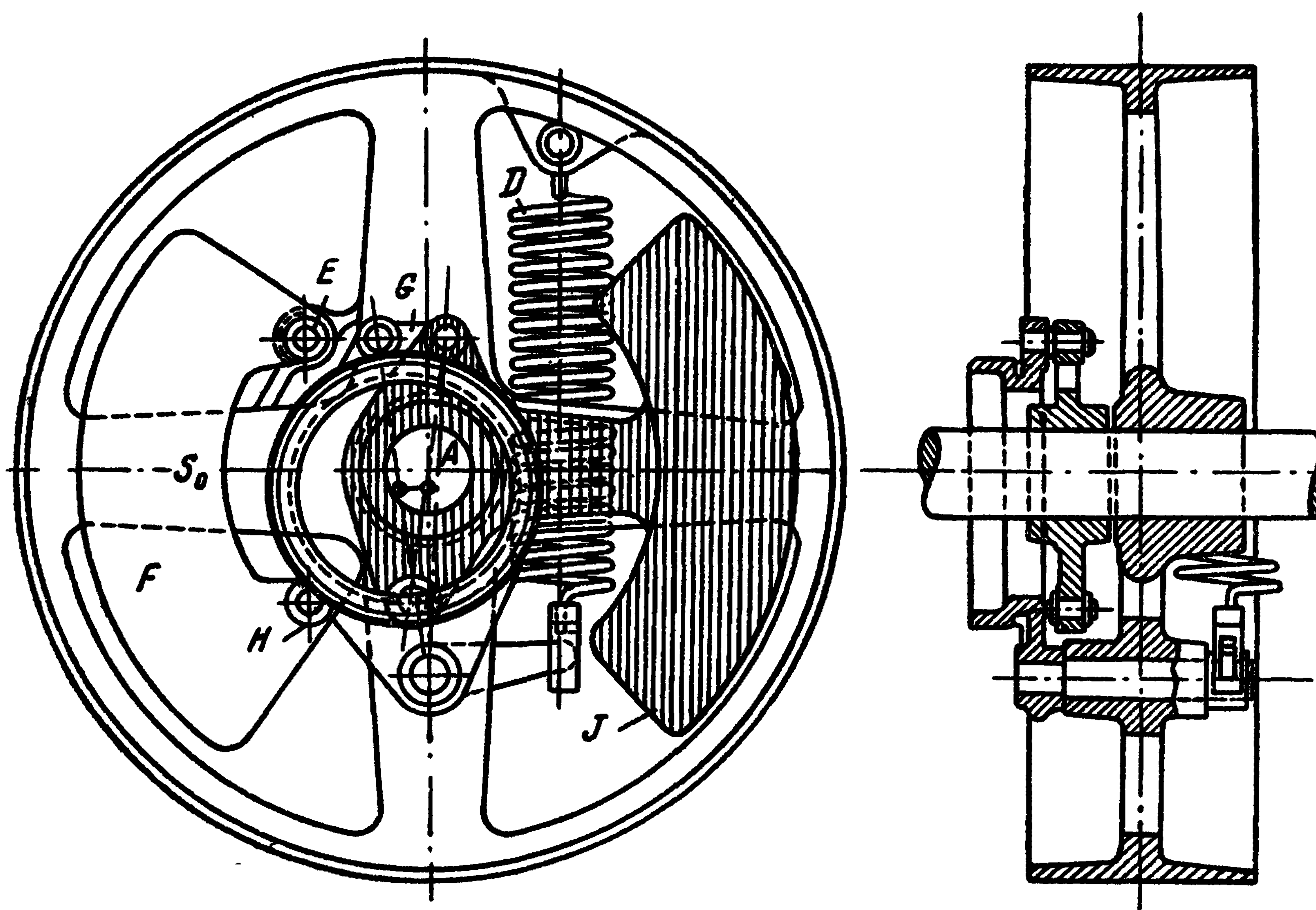
Фиг. 14

большим трудом добиться хорошей астатичности и неизбежно должно иметь значительное собственное трение, так как сила передается с помощью не меньше чем шести сочленений. Однако конструктору не плохо удалось разгрузить поверхности скольжения инерционных масс.

Регулятор Хершея (M. Hershey) и Аллена (B. Allen) (американский патент № 603189, 1897г.) (фиг. 16) является примером применения двух инерционных маятников. Собственное трение увеличено вследствие действия большой

центробежной силы выдвинутых далеко наружу инерционных масс, которая почти полностью должна восприниматься осями шарниров.

Несколько благоприятнее в этом отношении регулятор *Кнапа (E. C. Knapp) (американский патент № 603193,*

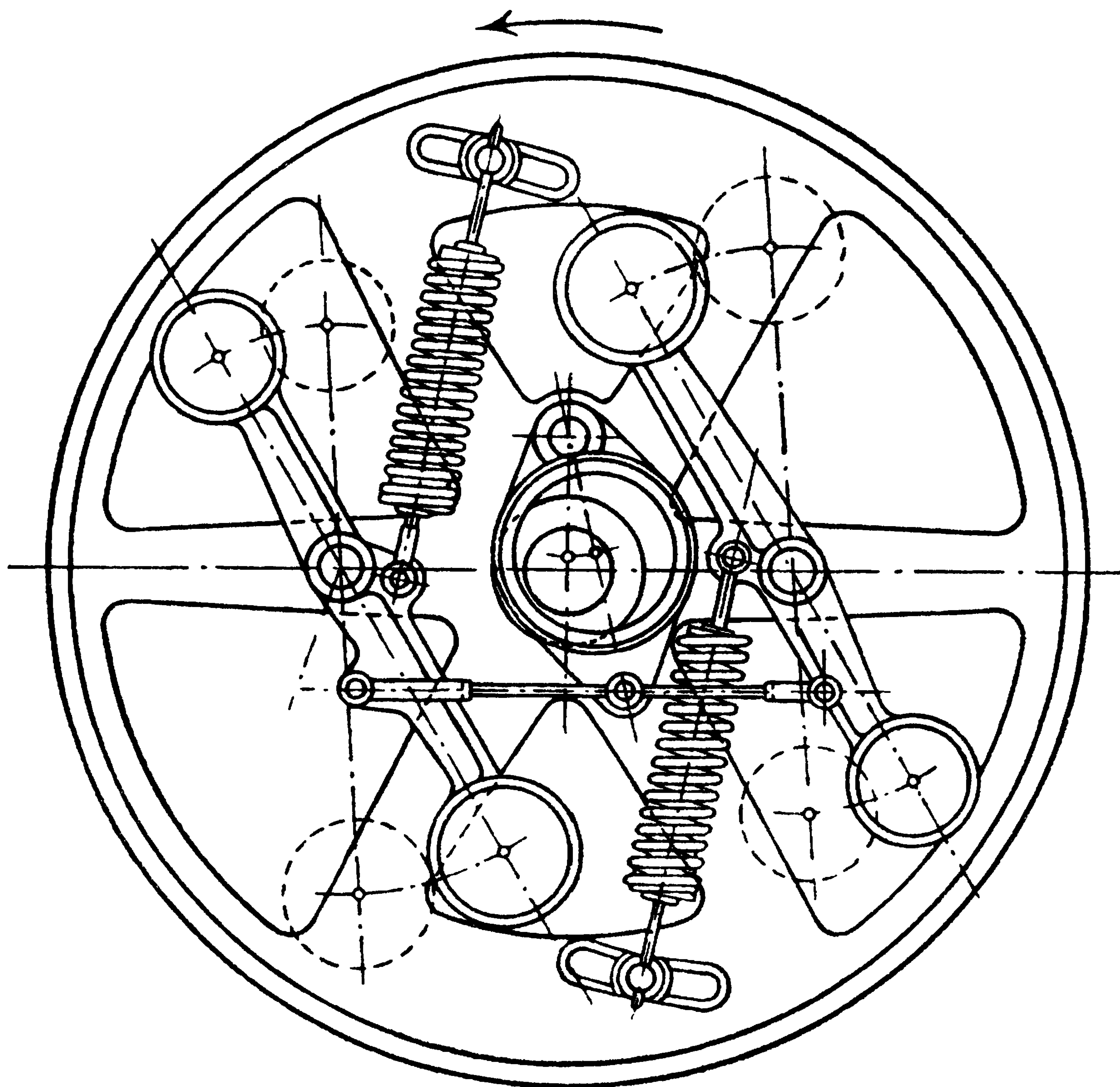


Фиг. 15

1897 г.) (фиг. 17), у которого центр тяжести каждого из его инерционных маятников может произвольно близко придвигаться к центру вала. Недостатком этой конструкции является то, что приходится допускать большие напряжения изгиба в плечах рычага.

Передача движения на эксцентрик конструктивно решена нецелесообразно. Линия центров может иметь разную кривизну. Использование действия инерции предписывает направление вращения, указанное на фигуре.

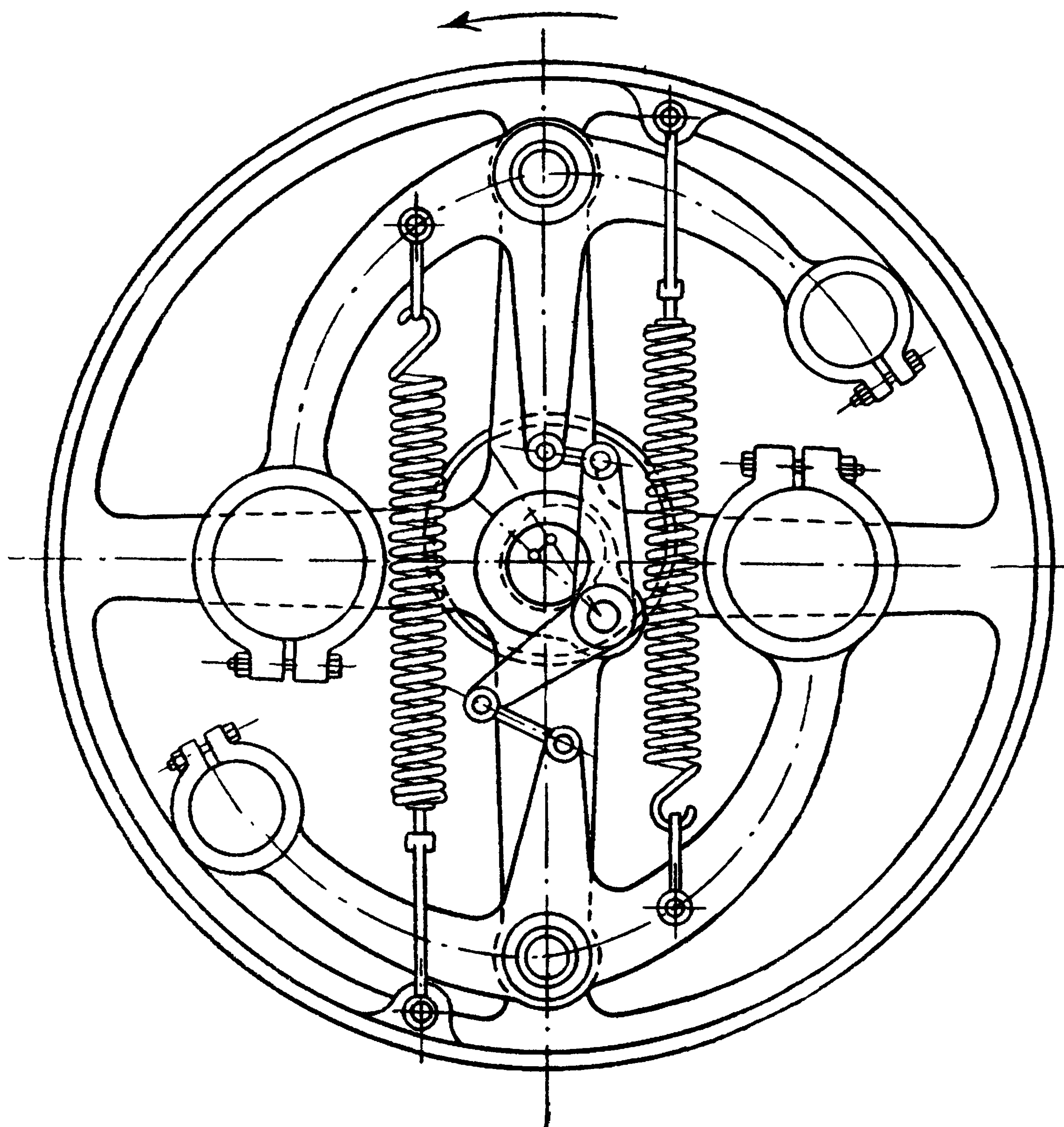
По сообщениям американских специалистов особенно удачными оказались образцы *Эвена (Mc. Even)* в конструктивном выполнении Ритеса (Rites), совпадающим с *регулятором Ball Engine Co.* Ясно, что основная идея инерционных регу-



Фиг. 16

ляторов может быть применена к регуляторам любого вида, в частности к так называемым коническим регуляторам. В обзоре американских патентных сообщений за последнее время указан, правда, лишь один пример такого рода, именно в регуляторе *F. H.* и *B. C. Ball (американский патент*

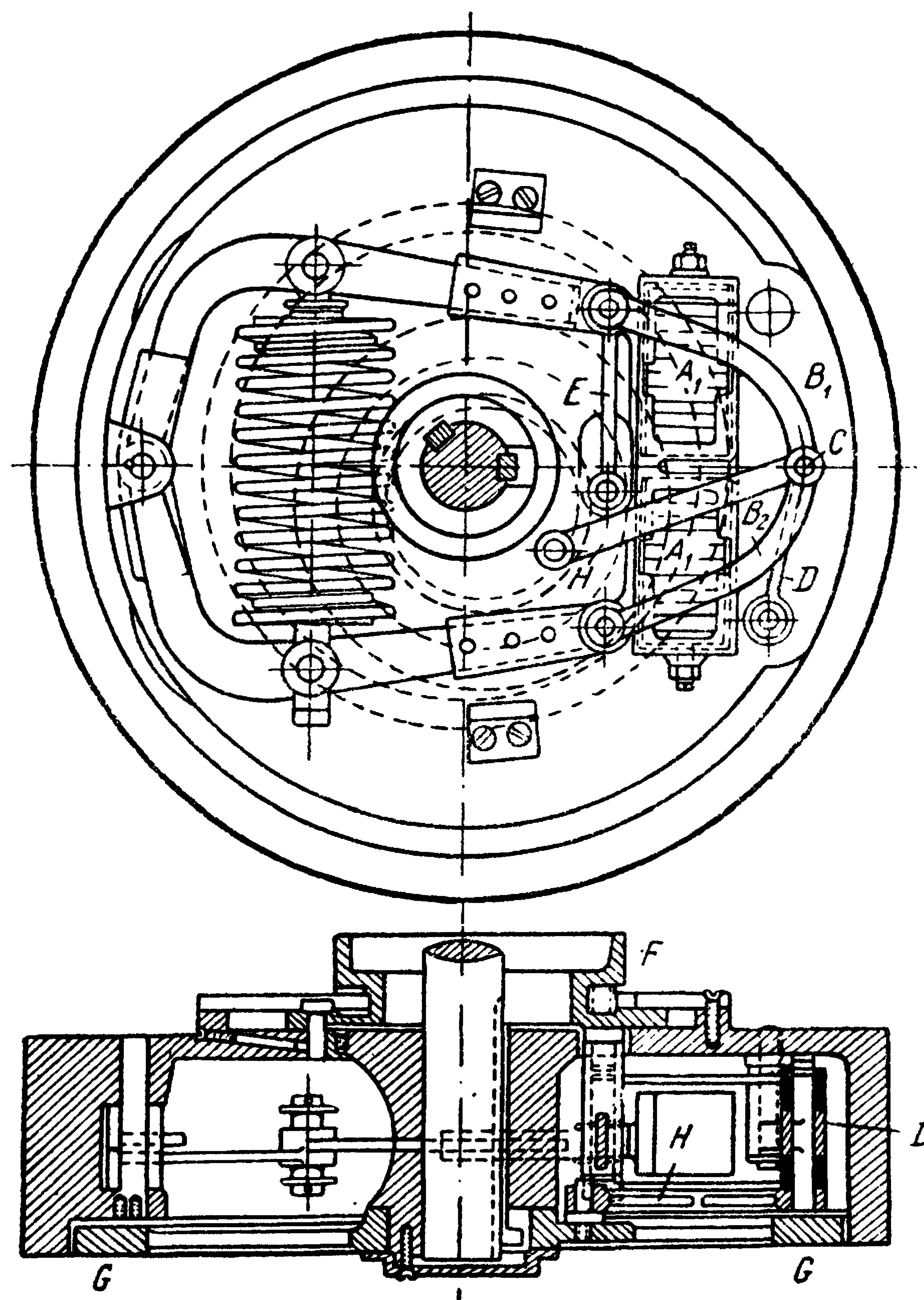
№ 601009, 1897 г.). Поясняющие чертежи неполны и поэтому непонятны, однако в описании патента достаточно подробно изложена суть изобретения, откуда видно, что регулятор состоит из одного или двух грузов, могущих колебаться



Фиг. 17

около цапф, параллельных оси и вызывающих эффективную инерционную перестановочную силу. Грузы, повидимому, соединены с „центробежным регулятором“, чтобы передавать ему свое движение. В Германии принцип Сименсов впервые был осуществлен у осевого регулятора *Куммера и К° (O. L.*

Kummer u. Co.), Фишингера (Fischinger) и Лекка (Leck) (немецкие патенты № 57994 и 60832, 1891 г.) (фиг. 18). Вращаю-



Фиг. 18

щиеся грузы A_1 и A_2 — полые и в соответствии с требуемым числом оборотов наполнены свинцовыми пластинами, а остаток пустого пространства заполнен деревянными прокладками. Тяги B_1 и B_2, встречающиеся в точке C и ведомые направляющей D, вынуждают инерционные массы совершать

почти равные отклонения. Тяга E действует на эксцентрик F. Инерционная масса G выполнена в виде шайбы, концентричной с валом, и связана при помощи стержня H с вращающимися грузами. Согласно официальному отчету о международной электротехнической выставке во Франкфурте 1891 г. (т. II, стр. 163), у машины мощностью в 25 киловатт при росте нагрузки, соответственно мощностям в 9.5, 28.8, 37.8, 47.9 л. с. число оборотов в минуту равнялось 322.2, 322.0, 322.6, 322.5. Эти числа оборотов так мало отличаются друг от друга, что регулятор можно считать полностью астатическим.

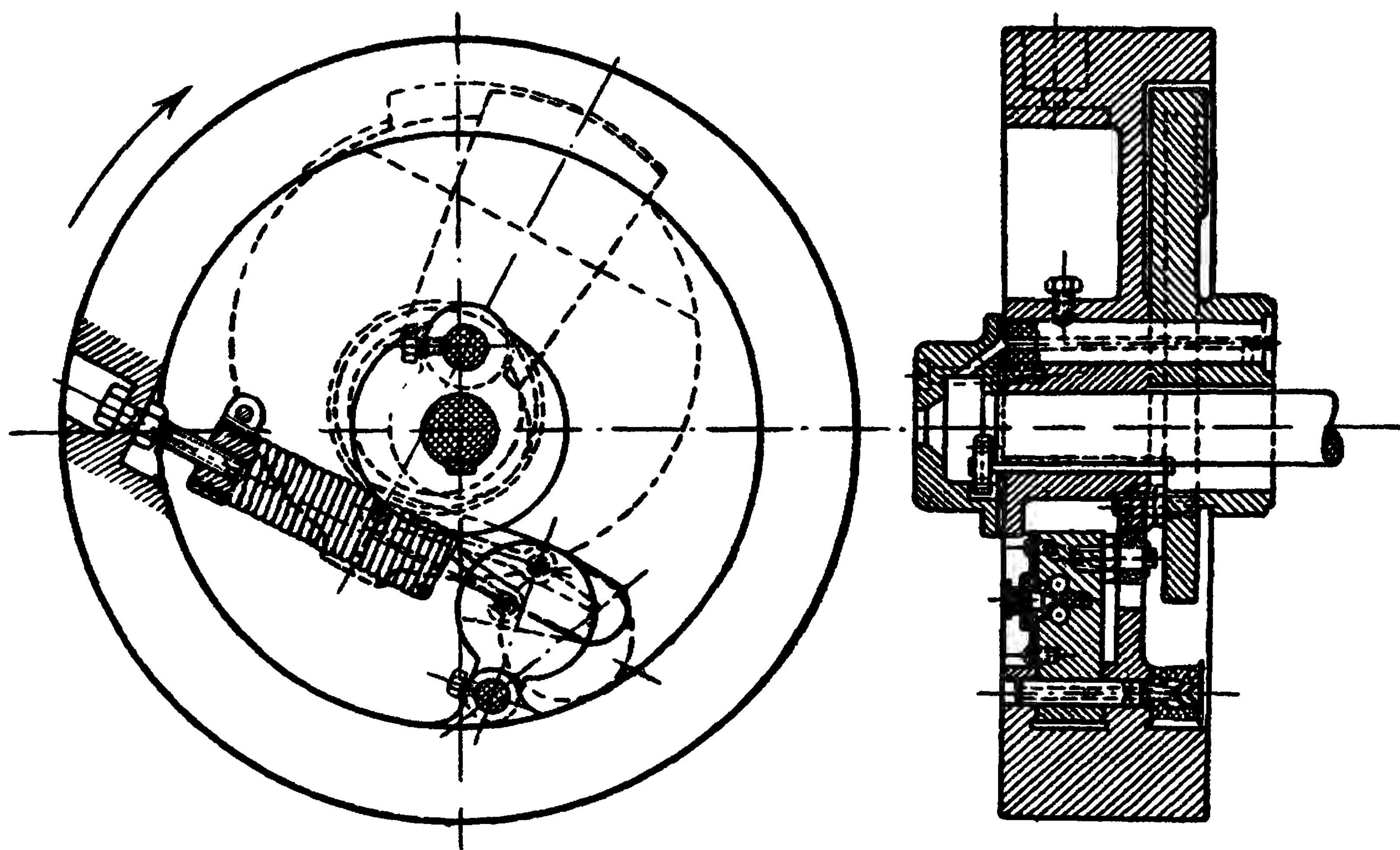
Конструкторы этого регулятора, кажется, первые осознали возможность добиться хорошей астатичности, применяя инерционный принцип.

Следует, впрочем, заметить, что в регуляторе, показанном на фиг. 18, положение инерционных масс более выгодное, чем указано в описании, приведенном в патенте.

В дальнейшем выгоду инерционного принципа учел *Давель (C. Daevel) в Киле*, что и было им использовано в его регуляторе (*немецкий патент № 74769, 1893 г.*). По фиг. 19 можно установить, что инерционная масса объединена с эксцентриком, в связи с чем линия центров имеет характерные особенности, указанные на фиг. 12. По сообщению конструктора, ссылающегося на свидетельство императорской верфи в Вильгельмсгафене, у машины мощностью в 7 л. с. число оборотов возрастало с 500 до 503 в минуту, когда генератор (посредством подъема щеток) внезапно и полностью разгружался. Однако число оборотов тут же уменьшалось до 500 в минуту, потому что регулятор, особенно в конце хода, был почти полностью астатичным. Подобные же прекрасные результаты были получены с машиной в 16 л. с.

Точно так же машиностроительное акционерное общество *Брайтфельда и Данека (Breitfeld und Danek) в Праге* по предложению его директора Шонбаха (V. Schönbach) при-

меняет инерционные массы в соединении с известным регулятором Doerfel — Proell (фиг. 20). $A_1 A_2$ — центры вращения центробежных грузов. При помощи рычагов B_1 и B_2 движение, с одной стороны, передается эксцентрику, а с другой стороны, при помощи тяг C_1 и C_2 достигается связь с кольцеобразной инерционной массой D. Приспособление

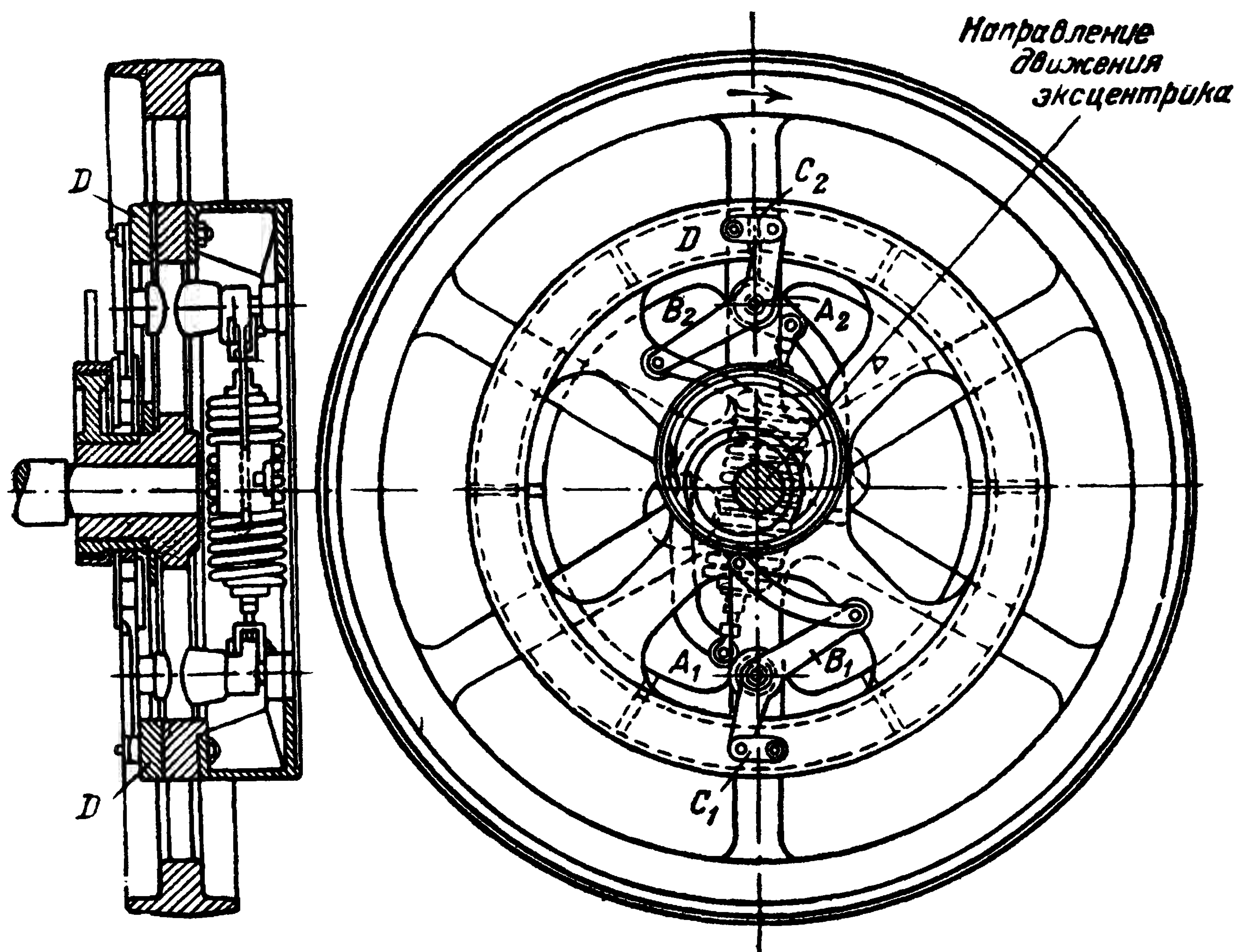


Фиг. 19

используется уже с 1892 г. и дает, особенно у маленьких регуляторов, желательное усиление их действия. Интересно сообщение, что при призматических опорах у всех сочленений инерционная масса делает регулятор неустойчивым, т. е. делает невозможным регулирование. Этот факт является доказательством правильности изложенных выше теоретических рассуждений: затухание колебаний, обусловленное собственным трением или катарактом, дожно быть тем больше, чем больше масса (иначе говоря, „время падения“ T) регулятора.

Что же касается перспектив инерционного регулятора, то можно заметить следующее.

Наши легкие центробежные пружинные регуляторы, вращающиеся с большим числом оборотов, которые ранее



Фиг. 20

в особенности применялись швейцарскими турбиностроительными фирмами и которые позволили по существу впервые добиться хорошего регулирования водяных двигателей, работающих при тяжелых условиях, являются сейчас регулирующими приспособлениями, технически мало оставляющими желать лучшего. Поскольку при тщательно выполненных призматических опорах их собственное трение будет незначительным, они почти заслуживают названия „идеаль-

ных регуляторов". Здесь, очевидно, инерционный принцип немного может что-либо улучшить.

Тяжелые осевые регуляторы наших современных быстроходных двигателей с распределительными механизмами, движущимися с большими сопротивлениями, напротив, скорее могут быть причислены к категориям центробежных регуляторов, требующих улучшения и могущих быть улучшенными. Каким образом, например, у такого регулятора с четырьмя или более пружинами, из которых каждая, в зависимости от обстоятельств, испытывает сжимающее или растягивающее усилие в несколько тысяч килограммов, может быть конструктивно осуществлено приспособление для изменения числа оборотов?! Если в этих случаях можно получить основную часть перестановочного усилия за счет инерционных масс и поэтому центробежная масса может быть сделана настолько малой, что связанная с ней пружина примерно в 10 раз меньше той, которая требовалась бы при отсутствии инерционных масс, то в этом случае применение инерционных масс оправдано.

ПРИЛОЖЕНИЕ

В заключение работы об инерционных регуляторах, в которых, как и в обычных плоских регуляторах, используются пружины, рассмотрим некоторые проблемы, относящиеся к напряжениям и деформациям в винтовой пружине, которые могут оказаться полезными в практических задачах.

1. Изгиб винтовой пружины под действием двух равных и противоположно направленных пар, приложенных к ее концам. На фиг. 21 $ABCDA'$ представляет виток винтовой пружины; B — центр тяжести элемента $rd\varphi$. Пусть шаг так мал, что виток можно рассматривать как лежащий в одной плоскости. BF является вектором изгибающего момента, который разложим на радиальную

и касательную компоненты BH и BG. Первая вызывает изгиб, вторая кручение, причем

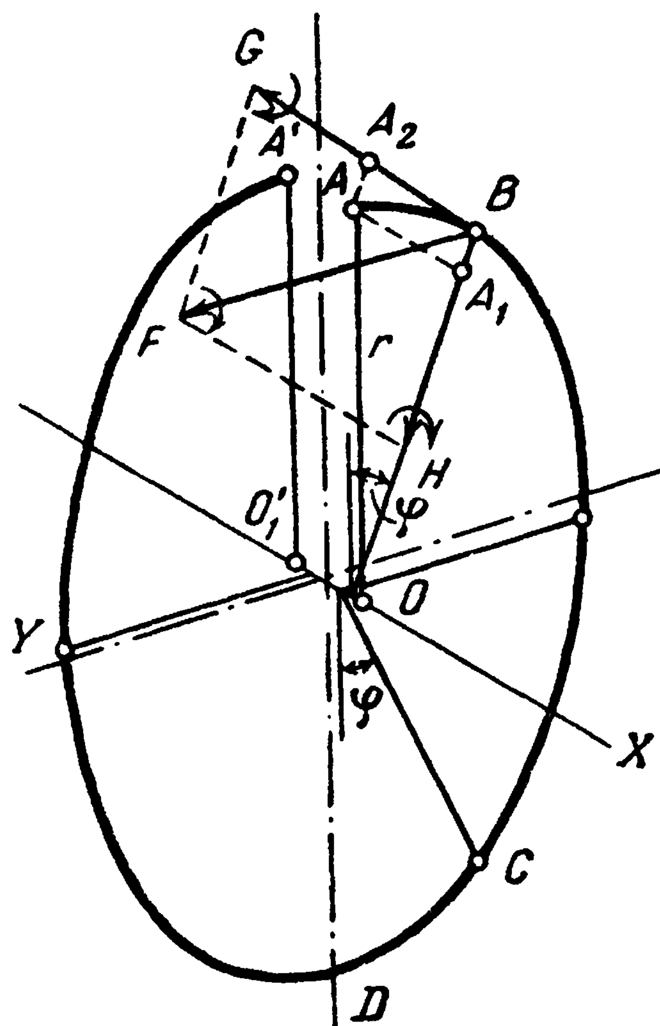
$$\left.\begin{aligned} M_b &= M \sin \varphi, \\ M_t &= M \cos \varphi. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Эти моменты обусловливают угловые деформации изгиба и кручения (в радианах на сантиметр длины)

$$\alpha_b = \frac{M_b}{IE}, \qquad \alpha_t = \frac{M_t}{KG},$$

где I означает момент инерции поперечного сечения относительно оси изгиба BO; K — полярный приведенный момент инерции по Сен-Венану, т. е.

$$K = \frac{F^4}{\psi I_p}. \qquad (2)$$



Фиг. 21

Здесь F — поперечное сечение, I_p, как обычно,— полярный момент инерции, а ψ равно (в единицах: см, кг, сек.) для поперечного сечения

круга	$\psi = 39.5$
квадрата	$\psi = 42.7$
прямоугольника с отношением сторон 2 : 1	$\psi = 42$
прямоугольника с отношением сторон 4 : 1	$\psi = 40.2$

E и G — модули упругости растяжения и сдвига.

Для определения деформации витка необходимо найти перемещение точки A и углы поворота как нормали к поперечному сечению, так и оси поперечного сечения AO, первоначально проходившей через O. Если обозначим эти

величины, обусловленные деформацией половины витка ABD, через ξ, β, ν, то получим:

$$\left.\begin{aligned}
\xi &= \int\limits_0^\pi [\alpha_b r \sin\varphi - \alpha_t r(1-\cos\varphi)]\, r d\varphi = \\
&= \frac{\pi}{2} M r^2 \left[\frac{1}{IE} + \frac{1}{KG}\right]; \\
\beta &= \int\limits_0^\pi [\alpha_b \cos\varphi - \alpha_t \sin\varphi]\, r d\varphi = 0; \\
\gamma &= \int\limits_0^\pi [\alpha_b \sin\varphi + \alpha_t \cos\varphi]\, r d\varphi = \frac{\pi}{2} M r \left[\frac{1}{IE} + \frac{1}{KG}\right] = \frac{\xi}{r}.
\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

То, что $\beta = 0$, можно видеть непосредственно, если заметить, что элемент C, расположенный относительно D так же, как B относительно A, и обусловливает одинаковый с B, но направленный в противоположную сторону, поворот нормали, проходящей через A. Величины ξ и γ показаны на фиг. 22. Смещения и изменения углов во всех других направлениях равны нулю. Из фиг. 22 ясно, что конечная точка O радиуса AO после деформации снова попадает в O (с точностью до малых величин второго порядка, которыми здесь пренебрегаем). Поэтому длина оси s этой части пружины, т. е. шаг первоначальной винтовой линии, не изменяется при деформации. Мы можем назвать плоскость, связанную с сечением A и первоначально перпендикулярную к оси, „плоскостью поперечного сечения" пружины. Плоскости поперечного сечения пружины, принадлежащие крайним точкам AA', ведут себя как поперечные сечения изогнутой балки; они остаются перпендикулярными к изогнутой оси. Пусть I_0 означает момент инерции поперечного сечения прямого бруса длиной s, подвергнутого такой же деформации изгиба, как и часть

пружины AA'. В этом случае должно быть справедливо соотношение:

$$2\gamma = \frac{M}{I_0 E} s = \pi M r \left[\frac{1}{IE} + \frac{1}{KG} \right],$$

Фиг. 22

из которого следует, что

$$I_0 = \frac{s}{\pi r} - \frac{I}{1 + \frac{IE}{KG}}. \qquad (4)$$

2. Удлинение x, получаемое одним витком пружины под действием осевой силы P, определяется, как известно, выражением:

$$x = r d_l 2\pi r = \frac{2\pi r^3 P}{KG}.$$

Найдем и в этом случае эквивалентный прямой брус, который получает равное удлинение при равной осевой силе и равной осевой длине. Для него должно быть

$$x = \frac{Ps}{F_0 E}.$$

Следовательно,

$$F_0 = \frac{GKs}{E 2\pi r^3}. \tag{5}$$

3. Мы добавим к этим напряжениям также кручение, т. е. деформацию, вызванную парой сил, действующей вокруг оси пружины. Как известно, концевое сечение пружины поворачивается на угол (отнесенный к одному витку)

$$\alpha_0 = \frac{2\pi r M}{I_b E},$$

где I_b — обычный момент инерции относительно линии, параллельной оси пружины. Подобный же поворот будет иметь прямой стержень равной длины, если его полярный приведенный момент определится из уравнения

$$\alpha_0 = \frac{MS}{K_0 G},$$

т. е. если

$$K_0 = \frac{E}{G} \frac{S}{2\pi r} I_b. \tag{6}$$

Этот результат может быть сведен к следующему правилу:

Деформации цилиндрической винтовой пружины, вызванные произвольными нагрузками, вызывающими растяжение, изгиб и кручение, можно приближенно определить, если рассматривать пружину как прямую балку той же самой длины и с теми же условиями в отношении нагрузки и закрепления концов. При этом балка имеет при растяжении поперечное

сечение, равное F_0, при изгибе момент инерции I_0, при кручении полярный приведенный момент K_0.

Приближение будет тем точнее, чем теснее намотана пружина и чем меньше изменяются силы и моменты от витка к витку. Напряжения сдвига, ввиду малого практического интереса, оставляем без внимания.

4. Продольный изгиб винтовой пружины определяется без труда по формуле Эйлера:

$$P = K\frac{I_0E}{L^2}, \tag{7}$$

где K означает известную постоянную, определяемую из условий закрепления концов, L—полная осевая длина пружины.

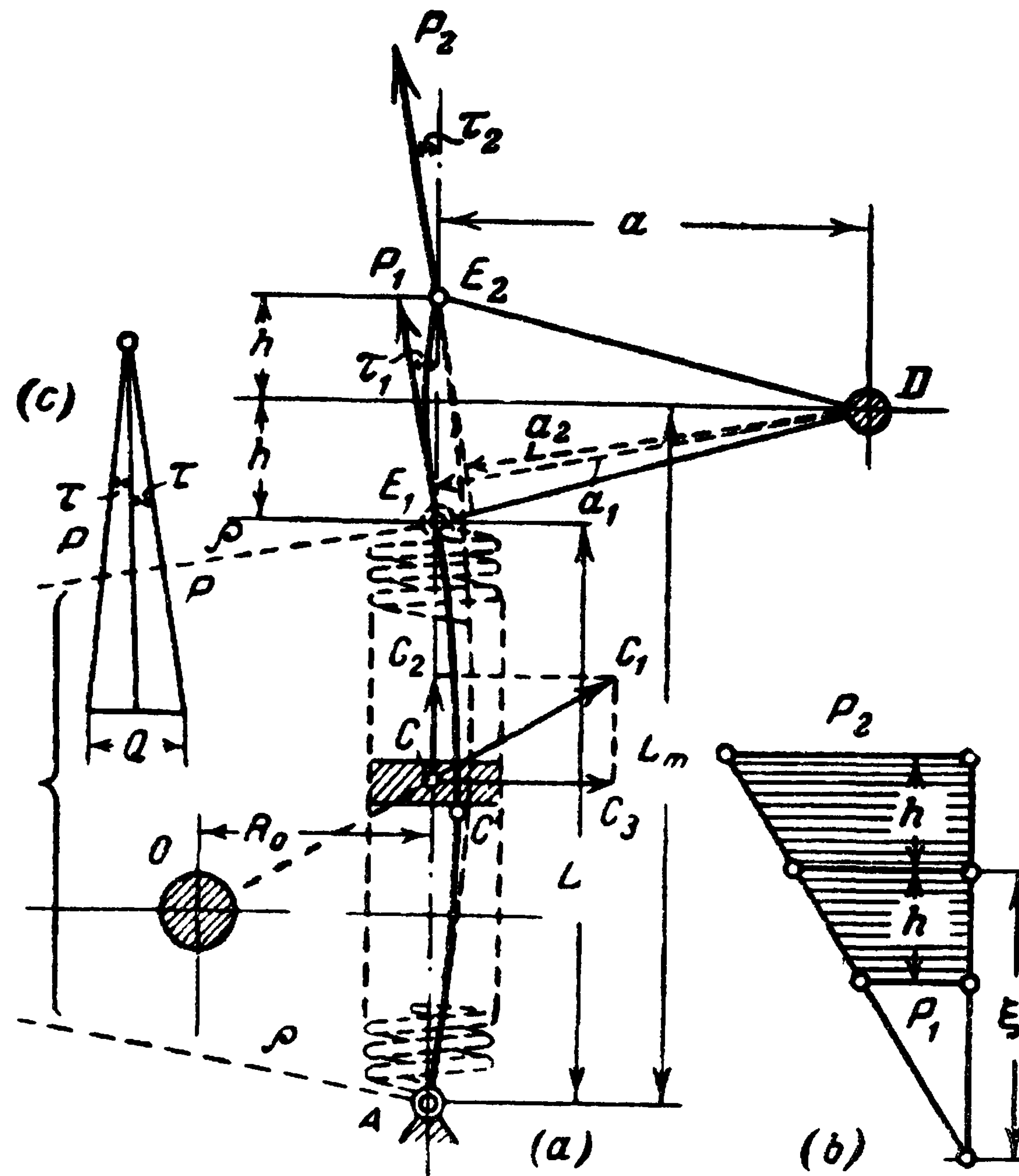
5. Растяжение и изгиб приобретают значение при эксцентрически расположенных регуляторных пружинах как вследствие увеличения напряжения, так и, кроме всего, из-за изменений направления силы и вытекающего отсюда влияния на устойчивость регулятора. Пусть (фиг. 23) пружина натянута между точками A и E_1 при начальном натяжении P; D—центр вращения инерционного маятника; E_1 и E_2—крайние положения точки закрепления пружины. Если бы пружина осталась прямой, то фиг. 23,*b* изображала бы изменение действующей силы; вследствие изгиба изменится величина силы и плеча, на котором она действует.

Разлагая центробежную силу CC_1, убеждаемся, что нормальная компонента остается постоянной; следовательно, пружина на единицу длины будет нагружена равномерно.

Аксиальной компонентой центробежной силы сначала пренебрежем. Предположив сначала, что пружина обладает совершенной гибкостью, ее упругую линию можно рассматривать как параболу. Длину дуги параболы L', зная расстояние между точками закреплений, найдем по формуле:

$$L' = L\left(1 + \frac{\tau^2}{6}\right).$$

где τ означает угол наклона касательной на конце пружины. В таком же отношении увеличивается напряжение.



Фиг. 23

Из рассмотрения силового многоугольника (фиг. 23,*c*) следует непосредственно, что

$$\tau = \frac{Q}{2P}, \tag{8}$$

где Q означает суммарную нормальную нагрузку. Если заменить параболу $AC'B$ дугой окружности, то ее радиус должен быть приблизительно равен

$$\rho = \frac{L}{2\tau}. \tag{9}$$

Такое же значение имеет радиус кривизны параболы в ее вершине. С этой кривизной связано напряжение изгиба, которое может быть определено по величине момента*:

$$M = \frac{I_0 E}{\rho} = \frac{I_0 E 2\tau}{L} = \frac{I_0 E Q}{LP}. \tag{10}$$

Влияние прогиба пружины на неравномерность регулятора может быть установлено следующим образом. Введем обозначения:

ω_2 и ω_1 — соответственно верхняя и нижняя границы скорости в случае, когда нет изгиба;

ω_2' и ω_1' — то же при учете изгиба;

P_2, P_1, P_2', P_1' — аналогичным способом обозначенные силы в обоих случаях;

τ_2 и τ_1 — углы наклона касательных к упругой линии;

a_2 и a_1 — плечи сил, приложенных соответственно в точках E_2 и E_1.

Неизогнутая ось пружины проходит через точки E_1 и E_2. Тогда, в соответствии с обозначениями фиг. 23, справедливы следующие соотношения:

$$c_2\omega_2^2 = P_2 a, \qquad c_2\omega_2'^2 = P_2' a_2,$$
$$c_1\omega_1^2 = P_1 a, \qquad c_1\omega_1'^2 = P_1' a_1,$$

где c_1 и c_2 — постоянные, зависящие от размеров и положения маятника;

$$\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 = 1 + 2\delta; \qquad \left(\frac{\omega_2'}{\omega_1'}\right)^2 = 1 + 2\delta', \tag{11}$$

* М. Толле показал (Z d.VDI. 1897 г., стр. 885), что это приближение допустимо, поскольку произведение $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{P}{I_0 E}}$ составляет всего лишь несколько единиц, что, как правило, и имеет место в пружинах регуляторов.

где δ и δ' означают коэффициенты неравномерности соответственно без учета и с учетом изгиба пружины.

Разделив почленно друг на друга уравнения (11), получаем

$$\frac{1+2\delta}{1+2\delta'} \approx 1-2(\delta-\delta') = \frac{P_2}{P_1}\,\frac{P_1'}{P_2'}\,\frac{a_1}{a_2}.$$

На основании фиг. 23 приближенно

$$a_1 = a + (h - a\tau_1)\tau_1,$$
$$a_2 = a - (h + a\tau_2)\tau_2.$$

Если предположить, что τ — весьма малая величина, квадратом которой можно пренебречь, то

$$\delta - \delta' = \frac{h}{a}\tau_m, \qquad (12)$$

где τ_m означает среднее арифметическое из τ_1 и τ_2. Если средняя точка вала лежит на другой стороне пружины, то знак τ_m нужно изменить. Во втором приближении, сохраняя τ^2, получим:

$$\delta - \delta' = \frac{h}{a}\tau_m + \left(\frac{L}{3\xi} - 2\right)\frac{h}{\xi}\tau_m^2, \qquad (13)$$

где L_m — полная длина пружины в среднем положении, ξ — растяжение от ненапряженного состояния до среднего положения, h — половина хода пружины.

Формулы не гарантируют отсутствия астатической точки в промежуточных положениях регулятора и могут быть использованы лишь для оценки порядка величины ожидаемых изменений δ.

6. Поправка на растяжение пружины из-за собственной центробежной силы.

Пусть на фиг. 24 A_0B — длина ненапряженной пружины. Под действием давления P со стороны маятника регулятора пружина сжата до длины AB; влияние собственной центробежной силы еще укоротит ее до $A'B$.

Пользуясь обозначениями фиг. 24, получим в соответствии с уравнением (5):

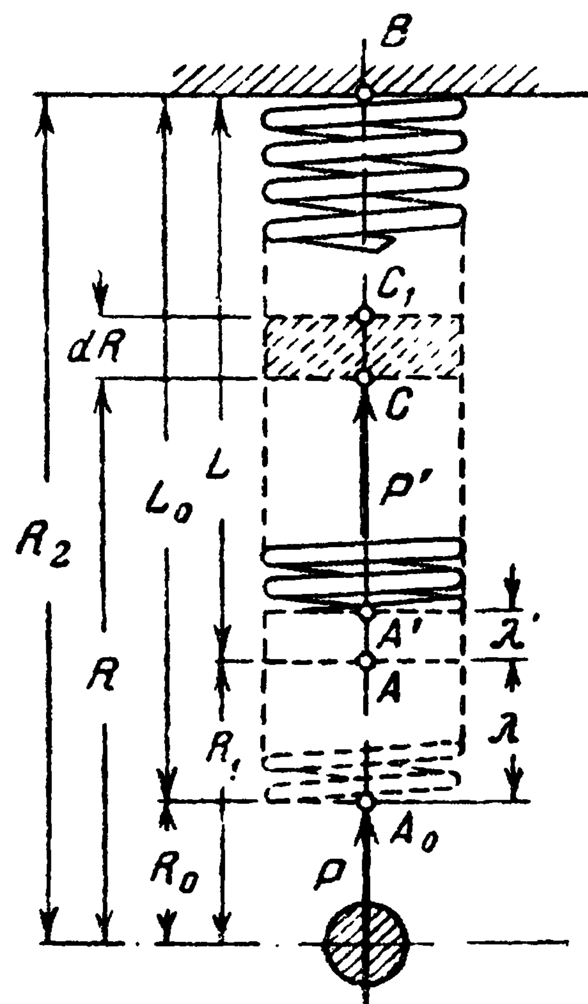
$$\lambda = \frac{PL_0}{F_0 E}.$$

Если формулу для „приведенного поперечного сечения" запишем в форме

$$F_0 = As_0,$$

где $A = \frac{G}{E} \frac{K}{2\pi r^2}$, то получим:

$$\lambda = \frac{PL_0}{AEs_0} = \frac{Pn_0}{AE}. \qquad (14)$$



Фиг. 24

Здесь n_0 означает начальное число витков. Пренебрежем тем, что (из-за изменения угла подъема) это число витков несколько изменяется при деформации, и будем считать n_0 постоянным. Пользуясь законом суперпозиции деформаций, мы можем подсчитать последующее укорочение из-за центробежной силы, если $AB = L$ — естественная длина пружины, и если P отсутствует. Если пренебречь неравномерным укорочением, вызванным центробежной силой, то сила, действующая на поперечное сечение C, будет равна произведению массы, расстояния до центра тяжести и квадрата угловой скорости:

$$P' = \mu(R - R_1)\left(\frac{R + R_1}{2}\right)\omega^2 = \frac{\mu\omega^2}{2}(R^2 - R_1^2),$$

где μ — масса пружины на единицу длины оси. Примыкаю-

щий к C элемент dR испытывает сжатие

$$d\lambda' = \frac{P' dR}{F_0 E},$$

интегрируя которое в пределах R_1 и R_2, получим:

$$\lambda' = \frac{MR_2\omega^2 n_0}{64E}\left(1 + \frac{2R_1}{R_2}\right); \qquad (15)$$

M — общая масса пружины. Величину

$$M' = \frac{1}{6}\left(1 + 2\frac{R_1}{R_2}\right) M \qquad (15а)$$

можно назвать *приведенной* массой пружины $M'R_2\omega^2 = P''$ — представляет собой центробежную силу, которая развивалась бы приведенной массой, если бы она была сосредоточена на конце пружины, и которая может быть названа „приведенной“ центробежной силой. В таком случае формула (15) может быть записана в виде:

$$\lambda' = \frac{P'' n_0}{AE}.$$

Общее укорочение пружины равно $z = \lambda + \lambda'$.

Подставляя в формулу для λ' значение $R_1 = R_0 + \lambda$, получим:

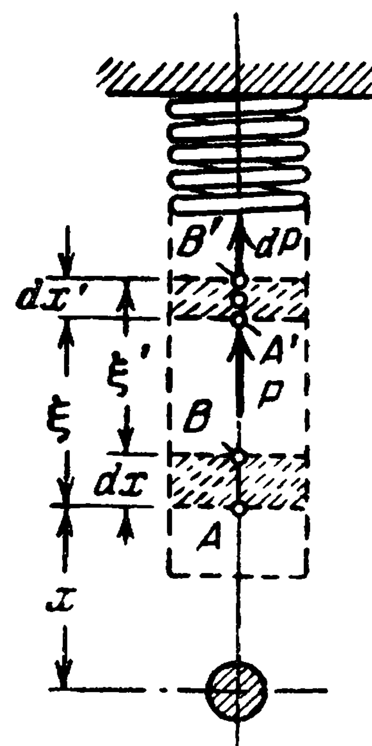
$$z = \left[1 - \frac{P_0 n_0}{3AER_2}\right]\frac{Pn_0}{AE} + \frac{P_0 n_0}{6AE}\left(1 + 2\frac{R_0}{R_2}\right) = \alpha\lambda + \lambda'. \qquad (16)$$

Здесь P_0 означает центробежную силу, развиваемую суммарной массой пружины, сосредоточенной в точке, вращающейся на расстоянии R_2 от оси. Второе слагаемое в формуле (16) означает укорочение, создаваемое в ненапряженной пружине, приведенной центробежной силой. Оно увеличивает общие укорочения пружины на постоянную величину (если не учитывать изменения угловой скорости) и может быть

скомпенсировано предварительным натяжением пружины. Большое значение может приобрести коэффициент α, влияние которого сказывается в том, что укорочение, вызываемое силой P, возрастает медленнее, чем при $\alpha = 1$. Кривая силы пружины получается тогда менее крутой, благодаря чему неравномерность уменьшается. Численные примеры показывают, что эта поправка имеет практическое значение лишь для крупных регуляторов.

Эксцентрическое положение пружины изменяет формулу для z в соответствии с замечанием (5) лишь постольку, поскольку необходимо учитывать расстояние R_0R_2 от конца перпендикуляра, опущенного из центра вала на ось пружины. Если желают учесть неравномерное распределение витков после деформации пружины, то возникает интересный случай, заключающийся в том, что в расчет должны вводиться силы с учетом их значений и положений их точек приложения, соответствующих деформированному состоянию пружины. Ход расчета должен быть в соответствии с фиг. 25 таков. Пусть элемент AB после деформации занимает положение $A'B'$ и пусть сила, действующая в этом положении на граничную поверхность A, равна P. Начальная длина dx уменьшается до dx' в соответствии с формулой

$$dx - dx' = \frac{Pdx}{F_0E}.$$



Фиг. 25

Смещения ξ и ξ' точек A и B связаны между собой соотношением

$$\xi + dx' = \xi' + dx,$$

откуда следует:

$$\frac{d\xi}{dx} = -\frac{dx - dx'}{dx} = -\frac{P}{F_0E}. \tag{17}$$

Прирост центробежной силы dP, порождаемый элементом dx, равен

$$dP = \eta dx\,(x+\xi)\,\omega^2, \tag{18}$$

где μ — масса на 1 см первоначальной длины.

Из (17) и (18) следует:

$$\frac{d^2\xi}{dx^2} = -\frac{\mu\omega^2}{F_0 E}(x+\xi). \tag{19}$$

Используя это уравнение, можно обычными приемами получить решение задачи.

ПРИЛОЖЕНИЯ





А. А АНДРОНОВ и | И. Н. ВОЗНЕСЕНСКИЙ |

О РАБОТАХ Д. К. МАКСВЕЛЛА, И. А. ВЫШНЕГРАДСКОГО и А. СТОДОЛЫ В ОБЛАСТИ ТЕОРИИ РЕГУЛИРОВАНИЯ МАШИН

Из многих сотен ученых и инженеров, работавших в XIX в. над вопросами теории регулирования машин, нужно особо выделить трех: английского физика — профессора в Кембридже Джемса Клерка Максвелла (1831—1879), русского инженера — профессора СПБ Технологического института Ивана Алексеевича Вышнеградского (1831—1895) и словацкого инженера — профессора Цюрихского Политехникума Ауреля Стодолу (1859—1942), фундаментальные работы которых создали то, что мы сейчас называем классической линеаризованной теорией автоматического регулирования.

1. РАБОТА Д. К. МАКСВЕЛЛА И ЕЕ ЗНАЧЕНИЕ

В 1868 г. появилась работа знаменитого английского физика Д. К. Максвелла „О регуляторах". В этой работе Максвелл обнаруживает свободное владение теми приемами исследования устойчивости движения, которые впоследствии получили название метода малых колебаний. Работа Максвелла „О регуляторах" генетически связана с его другой, более ранней знаменитой работой „Об устойчивости движения колец Сатурна" (1859). В первой части этой последней работы Максвелл, исследуя

устойчивость движения некоторых механических моделей кольца Сатурна, линеаризирует рассматриваемые задачи и, обобщая результаты Лагранжа, относящиеся к малым колебаниям консервативной системы вокруг положения *равновесия*, развивает на примерах теорию малых колебаний дискретной *консервативной* системы вблизи установившегося *движения*, т. е. такого движения, для которого в рассматриваемых координатах линеаризированная задача сводится к системе линейных уравнений с постоянными коэффициентами. В работе „О регуляторах" Максвелл линеаризирует рассматриваемые им задачи об устойчивости движения машин, снабженных различными регуляторами, развивает *на примерах* теорию малых колебаний дискретной динамической системы *общего* (*неконсервативного*) типа вокруг установившегося *движения* и, в конечном счете, сводит вопрос об устойчивости такого движения к алгебраической задаче об условиях отрицательности действительных частей корней легко составляемого характеристического уравнения.

Максвелл извлекает из этой алгебраической точки зрения отчетливое и — мы бы сказали — современное понимание механизма возникновения неустойчивости и самовозбуждения. Рассматривая систему машина — регулятор, исследование устойчивости установившегося движения которой сводится к исследованию алгебраического уравнения третьей степени, Максвелл утверждает, что явление самораскачивания системы машина — регулятор, возникающее при изменении какого-либо параметра (например, при увеличении массы регулятора), связано с переходом из области устойчивости, где все корни характеристического уравнения имеют отрицательные действительные части, в область неустойчивости, где один корень остается отрицательным, а два другие корня получают положительные действительные части. Это явление самораскачивания или, как мы теперь обычно говорим, явление самовозбуждения колебаний, с которым столкнулся уже Эри в 1840 г.,

Максвеллу хорошо известно. Он говорит об экспериментальном исследовании этого явления при помощи специального регулятора с устройством, позволяющим изменять воздействие регулятора на машину и, следовательно, позволяющим по произволу вызывать или подавлять самовозбуждение колебаний.

Тонкие замечания делает Максвелл о связи примитивного, квази-статического рассмотрения действия регулятора и настоящего динамического рассмотрения и о роли математики в исследовании самовозбуждения. В случае примитивного квази-статического подхода, когда пренебрегают инерцией грузов центробежного маятника и считают, что он идеально следит за угловой скоростью, машина с регулятором рассматривается как система с одной степенью свободы, а исследование устойчивости установившегося движения в простейшем случае сводится к исследованию алгебраического уравнения *первой* степени, всегда имеющего один и при этом отрицательный корень. Самовозбуждение в такой картине исключено. И Максвелл говорит, что изобретатели регуляторов ограничивались, как правило, этой воображаемой картиной, определяемой тем, как регуляторы *предназначены* действовать, и не принимали во внимание действительную картину, связанную с тем, что шары регулятора из-за инерции и трения не следят идеально за угловой скоростью и что система машина — регулятор является системой с двумя степенями свободы, для которой изучение устойчивости установившегося движения в простейшем случае сводится к исследованию алгебраического уравнения *третьей* степени.

Максвелл утверждает, что математическое исследование явления самовозбуждения имеет практическую ценность, так как позволяет найти лекарство для устранения этого явления. И Максвелл самым непринужденным образом находит в одних случаях — или подготавливает все для быстрого нахождения в других случаях — условия устойчивой работы (или — с об-

ратным знаком неравенств — условия самовозбуждения колебаний) некоторых типов регуляторов.

Начав свою работу с упоминания о трех родах „модераторов“ (обычный фрикционный регулятор, обычный регулятор Уатта, водяной регулятор Джона Томсона), Максвелл далее рассматривает — это и составляет основное содержание работы — три типа *астатических* регуляторов (фрикционный регулятор Дженкина, астатический регулятор Уатта, жидкостный регулятор Вильгельма Сименса), излагая сравнительно подробно их теорию и не касаясь деталей конструкции.

Максвелл был гениальным физиком, но не был инженером, хотя и интересовался некоторыми техническими вопросами. Самый выбор систем регуляторов, теорией которых он занимался, носит черты оторванности от инженерных задач регулирования промышленных машин, как они стояли в то время. Максвелл прошел мимо обычного регулятора Уатта *. Максвелл прямо говорит, что своей работой он хочет обратить внимание инженеров на динамическую теорию другого класса регуляторов — как бы мы сейчас сказали — на теорию *астатических* регуляторов, способных, по крайней мере в принципе, с гораздо большей точностью поддерживать постоянство числа оборотов при изменении нагрузки или движущей силы, чем обычные регуляторы Уатта.

Но поддержание с высокой точностью числа оборотов, являясь серьезной проблемой при конструировании некоторых физических и, в особенности, астрономических приборов,

* Максвелл, следуя Вильгельму Сименсу, даже отказал обычному регулятору Уатта (как и другим обычным регуляторам) в наименовании „регулятор“, а причислил его к „модераторам“, т. е. к устройствам, в названии которых подчеркивается, что они не способны поддерживать число оборотов постоянным и лишь умеряют („модерируют“) переменность числа оборотов при изменении нагрузки. Слово „регулятор“ Максвелл употребляет в том смысле, в котором сейчас употребляют слово *астатический регулятор* или *регулятор с нулевой неравномерностью*.

отнюдь не являлось жизненной задачей промышленной техники времен Максвелла. Это была первая причина, почему работа Максвелла осталась незамеченной и неиспользованной инженерами ни в самой Англии, ни на континенте.

Но была и другая более важная причина равнодушия инженеров, которая, в частности, объясняет, почему замечательные общие идеи работы Максвелла не были немедленно использованы для создания теории регулятора Уатта и, следовательно, для преодоления накоплявшихся практических затруднений: сама схематизация задач теории регулирования, принятая Максвеллом, не соответствовала тем объектам — промышленным паровым машинам, с регулированием которых имели дело инженеры.

Обращая внимание инженеров на теорию более совершенных, по его мнению, регуляторов, Максвелл не отдавал себе отчета в том, какие параметры *на практике* определяют устойчивость работы тех примерно 75 000 регуляторов Уатта, которые функционировали в Англии в 1868 г., и какова относительная величина некоторых констант, входящих в уравнения движения, если эти уравнения отнести к промышленным паровым машинам. В частности, это обстоятельство объясняет, почему Максвелл в своей работе пропагандировал инженерам не пригодный для обычных машин того времени, как это было твердо установлено впоследствии, астатический регулятор Уатта. Дело в том, что Максвелл, излагая теорию такого регулятора, пишет уравнения движения системы машина — регулятор в виде*:

$$\left.\begin{aligned} A\frac{d^2\theta}{dt^2}+X\frac{d\theta}{dt}+K\frac{d\phi}{dt}+G\phi=0,\\ B\frac{d^2\phi}{dt^2}+Y\frac{d\phi}{dt}-K\frac{d\theta}{dt}=0,\end{aligned}\right\}$$

т. е. учитывает саморегулирование машины (член $X\frac{d\theta}{dt}$) и учи-

* Мы приводим эти уравнения в измененных переменных.

тывает в уравнении главного вала зависимость приведенного момента инерции от положения муфты регулятора (член $K\frac{d\phi}{dt}$).

Из условий устойчивости этой системы, полученных Максвеллом,

$$\left(\frac{X}{A}+\frac{Y}{B}\right)(XY+K^2)>GK,$$

вытекает возможность, в некоторой области значений параметров, устойчивой работы *астатического* регулятора Уатта. Максвелл не замечает, что эта область значений параметров для обычных паровых машин не имеет практического значения, так как для них член $X\frac{d\theta}{dt}$ и в особенности член $K\frac{d\phi}{dt}$ могут быть отброшены в уравнениях движения*.

Инженеры ни в выводах Максвелла, ни даже в его уравнениях не могли прочесть никаких указаний, как им бороться с проявлявшейся во многих случаях склонностью машин, снабженных обычными регуляторами Уатта, к неустойчивой работе и к самораскачиванию. Однако появление работы Максвелла о регуляторах представляет собой событие в теоретической механике и в теории регулирования.

Максвелл отлично представлял себе возможность исследования динамики других, более сложных, чем рассмотренные им, систем регулирования. В его работе имеется не вполне законченный набросок рассмотрения взаимодействия машины и сложного „двухступенчатого" регулятора. В связи с этим Максвелл отчетливо понимал прикладную важность нахож-

* Сходные замечания могут быть сделаны и по поводу двух других типов астатических регуляторов прямого действия, рассмотренных Максвеллом. Когда в начале XX в. в технике регулирования промышленных машин стали распространяться изодромные регуляторы, обеспечивающие астатическое регулирование, то их конструкции фундаментально отличались от конструкций, теория которых изучалась Максвеллом.

дения условий, которым должны удовлетворять коэффициенты алгебраического уравнения n-й степени для того, чтобы все его корни имели отрицательные действительные части. В работе „О регуляторах“ Максвелл пишет: „Я не в состоянии определить полностью эти условия для уравнения выше третьей степени, но я надеюсь, что этот вопрос привлечет внимание математиков“. 23 января 1868 г. на заседании Лондонского математического общества Максвелл спросил, не может ли кто-нибудь из членов общества указать способ получения необходимых и достаточных условий отрицательности действительных частей корней алгебраического уравнения n-й степени, и указал, что решение этого вопроса представляет интерес для теории регулирования. На вопрос Максвелла математик Клиффорд ответил, что, по его мнению, можно достичь успеха, составив новое алгебраическое уравнение, корни которого были бы суммами корней исходного уравнения, и, потребовав, чтобы все корни нового уравнения были бы отрицательны. Через несколько лет, в 1873 г., задача, поставленная Максвеллом, была решена Раутом — пока для уравнений 4-й и 5-й степеней именно по способу Клиффорда. Полностью эта проблема Максвелла была решена позднее тем же Раутом, в 1877 г., хотя все необходимые математические средства для решения этой задачи были даны еще Коши.

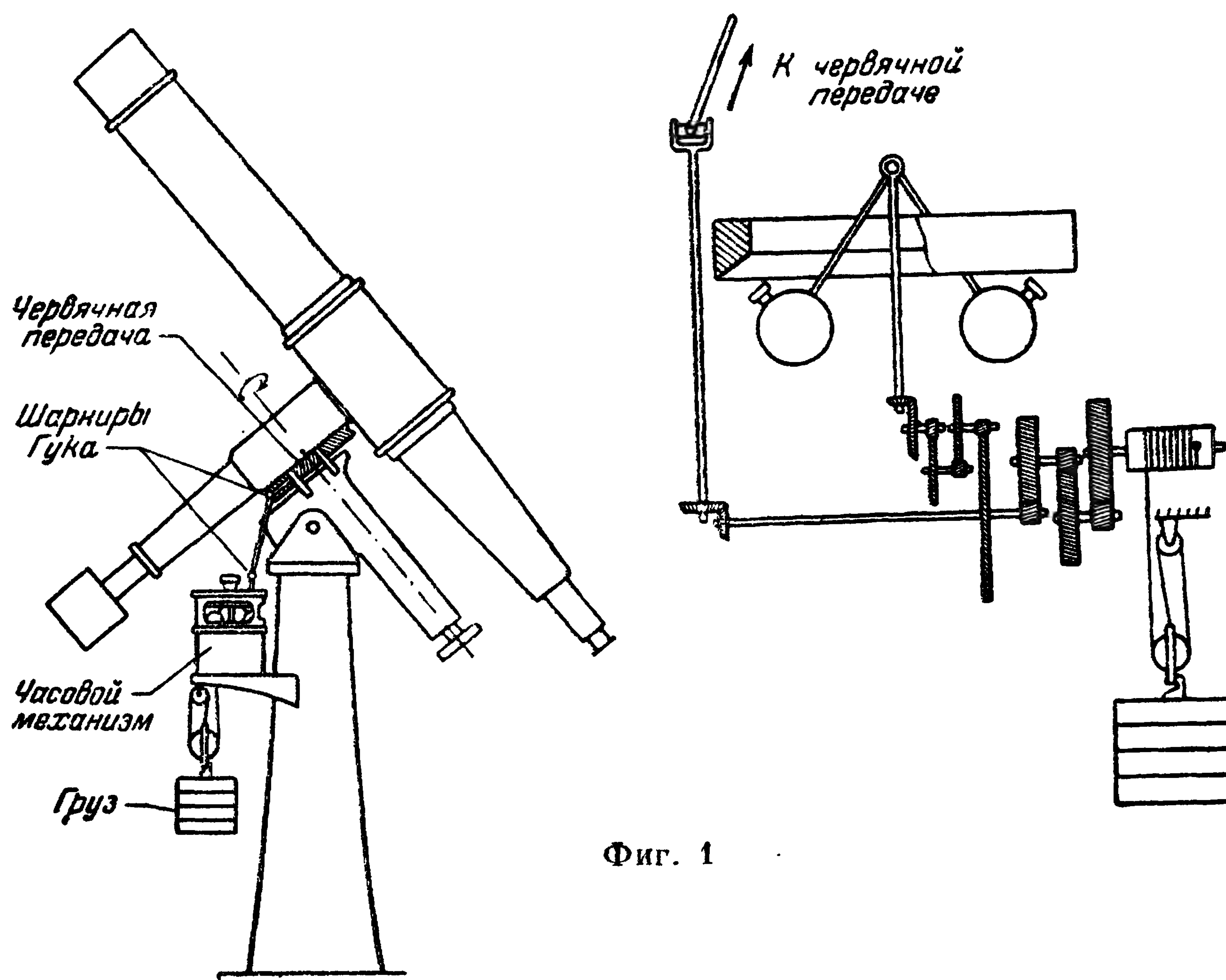
Говоря о предшественниках Максвелла, следует упомянуть о работах Эри* (1801—1892) — английского астронома, физика, математика и изобретателя. Его имя связано с первой попыткой объяснить явления самораскачивания в системе машина — регулятор.

---

* 1. G. Airy. „On the Regulator of the Clock-work for effecting Uniform Movement of Equatoreales“, Memoirs of the Royal Astronomical Society, vol. XI, 1840, стр. 249.

2. G. Airy. Supplement to a Paper „On the Regulator of the Clock-work for effecting Uniform Movement of Equatoreales“, Memoirs of the Royal Astronomical Society, vol. XX, 1850—1851, London, стр. 115.

Машина, с которой имел дело Эри, — это астрономическая труба, приводимая во вращение тяжелым грузом, а регулятор —



Фиг. 1

конический маятник Уатта, могущий изменять тормозное усилие*. Эри обратил внимание, что такие устройства далеко

* Уже в начале XIX столетия астрономы отчетливо представляли себе те выгоды для наблюдений, которые доставляются автоматическим перемещением астрономической трубы (экваториала), при котором труба «сама», независимо от наблюдателя, следит за видимым движением звезды по небесному своду. Такое автоматическое вращение экваториала осуществлялось во времена Эри (а во многих случаях осуществляется и в настоящее время) при помощи особого рода часового механизма, который приводится в движение тяжелым грузом и равномерность хода которого поддерживается не маятником Галилея—Гюйгенса, а коническим маятником

не всегда работают удовлетворительно, и что в некоторых случаях их работа сопровождается паразитными — иногда нарастающими — колебаниями угловой скорости, и задался целью найти теоретически причины неустойчивости.

В своей теории Эри не учитывает трения в сочленениях регулятора и ему удается показать, что при сделанном им предположении о пропорциональности тормозящего момента угловому отклонению грузов маятника Уатта от некоторой нормальной конфигурации (при которой момент, порождаемый тормозом, компенсирует момент груза) равномерное вращение трубы является *неустойчивым*.

Доказательство Эри крайне громоздко; он не проводит линеаризации самих уравнений возмущенного движения и получает приближенное решение путем длинных выкладок, напоминающих выкладки астрономической теории возмущений.

В течение ряда лет, вплоть до 1850 г., Эри пробует различные приспособления, улучшающие работу тормозных конических регуляторов, и, наконец, публикует новую статью на ту же тему „Дополнения к работе о регулировании часового механизма, осуществляющего равномерное вращение экваториала“ (1851), где он указывает, ссылаясь на эксперимент, что возникновение вредных колебаний может быть предотвращено без малейшего ущерба для работы экваториала, если к муфте конического регулятора присоединить особый водяной катаракт, развивающий силу трения, пропорциональную скорости муфты. Однако в этой второй статье Эри выступает скорее как

Уатта, связанным с тормозящим приспособлением. Простейший пример такого тормозного приспособления — так называемый конический тормозной регулятор, в котором грузы конического маятника Уатта, раздвигаясь с увеличением числа оборотов, касаются внутренней стенки круглого корпуса часов и создают таким образом момент силы трения, существенно зависящий от угловой скорости вращения (см. фиг. 1).

экспериментатор и изобретатель и не дает теории совместного движения экваториала и конического тормозного регулятора, муфта которого снабжена катарактом.

Простое сопоставление работ Эри и Максвелла показывает, каким крупным шагом в деле создания теории регулирования был переход к рассмотрению устойчивости движения системы машина — регулятор методом малых колебаний и отыскание соответствующих условий устойчивости непосредственно из рассмотрения линеаризованных уравнений движения, а не путем отыскания приближенных решений исходной нелинейной системы.

Из изложенного ясно значение работы Максвелла. Но не с Максвелла начинается теория регулирования машин, отвечающая на запросы промышленной практики.

2. РАБОТА И. А. ВЫШНЕГРАДСКОГО И ТЕОРИЯ РЕГУЛЯТОРА УАТТА

Теория регулирования машин, отвечающая на вопросы промышленной практики, начинается работой Вышнеградского „О регуляторах прямого действия“ (1876).

Вышнеградский, математик по образованию, был одновременно практическим инженером, и его подход к проблеме регулирования существенно отличался от подхода Максвелла.

У Максвелла проблемы теории регулирования рассматриваются как проблемы теоретической механики. У Вышнеградского теория регулирования — это глава курса прикладной механики или, скорее, глава курса, посвященного проектированию и конструированию паровых машин. Теоретические рассмотрения у Вышнеградского относятся к промышленным паровым машинам и конечные результаты теории им приводятся к компактным расчетным формулам и к элегантным графикам, позволяющим быстро использовать эти результаты на практике.

Только из сравнения работ Максвелла и Вышнеградского можно по-настоящему понять, чтó сделано Вышнеградским и что именно с Вышнеградского начинается инженерная теория регулирования машин.

Вышнеградский распутал вопрос о динамике обычного регулятора Уатта и, в частности, доказал непригодность астатических регуляторов, в сущности,— если встать на общую точку зрения,— при помощи тех же уравнений, на основании которых Максвелл сделал свои выводы о пригодности астатического регулятора.

Вышнеградского, как мы говорили, интересовало регулирование промышленных паровых машин, т. е. динамика системы паровая машина — обычный регулятор Уатта.

Чтобы отдать себе отчет в характере проблемы, стоявшей перед Вышнеградским, войдем в некоторые подробности.

Задачей регулятора Уатта является поддержание, в возможно узких пределах вокруг *заданного* значения, средней угловой скорости паровой машины при *изменениях* нагрузки, т. е., например, при включении и выключении обслуживаемых ею насосов, станков и т. д. Пусть нагрузка машины *уменьшилась*, тогда нарушается равновесие между действующим моментом и нагрузочным моментом и угловая скорость вала машины начинает увеличиваться. Шары регулятора в результате увеличения центробежной силы разойдутся, муфта поднимется и при помощи системы рычагов *уменьшит* поступление пара в цилиндр машины. Наоборот, если нагрузка машины увеличится, нагрузочный момент окажется больше действующего момента, угловая скорость машины начнет садиться, шары регулятора, вследствие уменьшения центробежной силы, сблизятся, муфта опустится и при помощи системы рычагов *увеличит* доступ пара в цилиндры машины.

Регулятор Уатта не просто производит выравнивание моментов, изменяя движущий момент в согласии с изменением

нагрузки, так что число оборотов сохраняется неизменным. В машине, снабженной регулятором Уатта, в установившемся режиме каждому числу оборотов соответствует* определенное положение муфты регулятора, а следовательно, и определенное положение заслонки, управляющей доступом пара. Таким образом, благодаря регулятору Уатта машина получает определенную *характеристику*, определенную однозначную зависимость числа оборотов от движущего момента. Тогда величина момента сопротивления *однозначно* определит число оборотов машины в установившемся режиме. Иначе говоря, паровая машина, снабженная регулятором Уатта, не может работать на любых оборотах при данной нагрузке, а каждой нагрузке соответствует определенное число оборотов.

Характеристика машины, создаваемая регулятором, может иметь те или другие особенности, в зависимости от тех целей, которые себе ставит конструктор. В частности, регулятор Уатта позволяет создать характеристику машины с резким спадом движущего момента в интересующем конструктора интервале угловых скоростей. Тогда в определенном диапазоне нагрузок угловая скорость машины будет изменяться лишь в сравнительно узких, заранее установленных пределах. В этом случае можно сказать, что регулятор Уатта удерживает машину вблизи заданного числа оборотов, несмотря на изменение нагрузки.

Максвелл рассматривал случай, когда машина сама по себе, без регулятора, имеет определенную характеристику, определенное самовыравнивание. В этом случае регулятор использует существующую характеристику машины, видоизменяя ее в нужную сторону.

Вышнеградский же рассмотрел другой, значительно более важный для практики того времени случай, когда

* Мы пренебрегаем нечувствительностью регулятора, связанной с наличием кулоновского трения.

самовыравнивание машины отсутствует, когда однозначной характеристикой машина не обладает или, иначе говоря, характеристика машины приближенно представляется прямой, параллельной оси числа оборотов *, и когда нужную характеристику машины *создает* регулятор.

Вышнеградский смело линеаризирует задачу, вступая этим в противоречие с предположениями ряда инженеров, пытавшихся создать до него динамическую теорию действия регулятора Уатта.

Именно Вышнеградский:

1) отбросил все нелинейности в регуляторе, в том числе (*в окончательных* уравнениях) и кулоновское трение в муфте и сочленениях регулятора;

2) предположил, что паровая машина обладает непрерывным подводом энергии, и принял линейную пропорциональность между смещением заслонки и действующим моментом**;

3) принял, что разным нагрузочным моментам соответствуют разные установившиеся угловые скорости системы машина — регулятор, т. е., говоря инженерным языком, принял, что регулятор имеет некоторую определенную, не равную нулю *неравномерность*;

---

* Поясним, что значит отсутствие самовыравнивания у машины, не снабженной регулятором. Пусть самовыравнивания нет и движущий момент, развиваемый машиной, постоянен и не зависит от числа оборотов. Пусть нагрузочный момент может принимать те или иные фиксированные значения. Тогда, если нагрузочный момент будет меньше движущего, машина пойдет в разнос; если нагрузочный момент будет больше движущего, машина остановится; если нагрузочный момент будет равен движущему, машина может иметь *любое* число оборотов, зависящее от начальных условий.

** Повидимому, Вышнеградский считал, что его теория охватывает и случай машины, работающей на отсечку пара. Как показал впоследствии Н. Е. Жуковский, выводы теории Вышнеградского справедливы и для машин, работающих на отсечку пара, если они достаточно быстроходны

4) отбросил саморегулирование машины и зависимость нагрузочного момента от числа оборотов;

5) принял постоянство момента инерции в уравнении движения главного вала машины.

Эти предположения* позволили Вышнеградскому правильно схематизировать проблему, отразить в весьма простых уравнениях существеннейшие черты динамической системы обычная паровая машина — регулятор Уатта и положить начало теории регулирования, способной оказывать фундаментальную помощь практике регуляторостроения.

Следует отметить, что Вышнеградский рассматривает (и это рассмотрение характерно для всей классической теории регулирования) некоторую определенную идеальную схему процесса регулирования: *одно* мгновенное изменение нагрузки и затем движение системы машина — регулятор без внешних воздействий в течение неограниченного промежутка времени. Это движение системы *после* изменения нагрузки, носящее название процесса регулирования, и исследуется при помощи линеаризированных уравнений, которые им составляются для малых отклонений от *старого* равновесного режима.

Условия сходимости процесса регулирования Вышнеградский сводит к условиям, которым должны удовлетворять коэффициенты характеристического уравнения

$$\theta^3 + M\theta^2 + N\theta + \frac{KLg}{I\omega_0} = 0,$$

чтобы все его корни имели отрицательные действительные части.

---

* Система уравнений, полученная Вышнеградским, отвечает положению дела не только в обычных паровых машинах, снабженных регуляторами Уатта, но, как мы сейчас знаем, охватывает и много других устройств, содержащих регуляторы прямого действия.

Как известно, эти условия сводятся к одному неравенству:

$$\frac{MN}{KLg} I\omega_0 > 1,$$

где M — коэффициент, характеризующий вязкое трение в муфте и сочленениях регулятора;

I — момент инерции главного вала;

KLg — мера подвижности регулятора;

N — коэффициент, характеризующий неравномерность регулирования;

ω_0 — установившаяся угловая скорость.

Вышнеградский дает замечательную геометрическую интерпретацию полученных им условий устойчивости, имеющую значение, выходящее за пределы рассматриваемой им задачи и позволяющую придать геометрический смысл проблеме об условиях отрицательности действительных частей корней алгебраического уравнения. Именно Вышнеградский в характеристическом уравнении переходит к новым переменным, полагая

$$\theta = \varphi \sqrt[3]{\frac{KLg}{I\omega_0}}, \quad M = x \sqrt[3]{\frac{KLg}{I\omega_0}} \quad \text{и } N = y \sqrt[3]{\left(\frac{KLg}{I\omega_0}\right)^2},$$

получает кубическое уравнение

$$\varphi^3 + x\varphi^2 + y\varphi + 1 = 0,$$

зависящее от двух параметров x и y, и строит знаменитую „диаграмму Вышнеградского“, откладывая по прямоугольным осям параметры x и y. Для этих параметров условия устойчивости имеют вид $xy > 1$ и, следовательно, на плоскости параметров гипербола $xy = 1$ (так называемая „гипербола Вышнеградского“) отделяет область значений x и y, соответствующую устойчивой работе системы машина — регулятор, от области, где имеет место неустойчивость (см. фиг. на стр. 61).

Это неравенство или, иначе, это условие отсутствия самовозбуждения позволило Вышнеградскому высказать свои зна-

менитые тезисы, относящиеся к конструированию обычных промышленных регуляторов Уатта:

1) без неравномерности нет регулятора,

2) без катаракта нет регулятора.

Первый тезис может быть сформулирован и так: астатические регуляторы непригодны. Этот тезис Вышнеградского находится в прямом противоречии со стремлением Максвелла обратить внимание инженеров на астатические регуляторы. Несомненно, что влияние коэффициента неравномерности на устойчивость процесса регулирования было окончательно выяснено только после работы Вышнеградского.

Второму тезису Вышнеградский придал весьма острую форму, высказав его так: всякий чувствительный и правильно действующий регулятор Уатта должен иметь катаракт, т. е. особое приспособление, порождающее вязкое трение.

Из этого же условия отсутствия самовозбуждения сразу вытекают важные указания о вредном влиянии на устойчивость приведенной массы регулятора и о фундаментальной роли момента инерции главного вала машины в вопросах выбора параметров регулятора.

После работы Вышнеградского динамика простейшей схемы регулирования — схемы Уатта — стала предельно прозрачной. Возникло отчетливое понимание, что машина и регулятор—это одно целое, что при переходных режимах возможно возникновение самораскачивания системы машина—регулятор и, что особенно важно, у *инженеров возникло понимание, в какую сторону влияют изменения тех или иных конструктивных параметров этой системы на возникновение такого самораскачивания.*

Однако содержание работы Вышнеградского не ограничивалось лишь вопросами устойчивости прямого регулирования паровой машины. В опубликованном почти одновременно с русским оригиналом немецком переводе этой работы * имеется

* Civilingenieur, XXIII, стр. 96—132 (1877).

дополнительный параграф (§ 14 немецкого текста), отсутствующий в русском оригинале*. В этом параграфе Вышнеградский занимается не устойчивостью регулирования, а качеством переходного процесса. Он определяет условия, при которых во время переходного процесса, вызванного мгновенным сбросом нагрузки, угловая скорость машины претерпевает конечное или бесконечное число колебаний. При этом Вышнеградский отчетливо понимает, что колебания могут вовсе отсутствовать даже в том случае, когда характеристическое уравнение системы имеет пару сопряженных комплексных корней. Вышнеградский находит уравнение кривой, которая на диаграмме Вышнеградского отделяет параметры, соответствующие монотонным переходным процессам и процессам с конечным числом колебаний, от параметров, при которых переходный процесс сопровождается бесконечным числом колебаний. Эта кривая имеет минимум при $Y = 2.38$, в то время как астатическому регулятору соответствует $Y = 0$. Это позволяет Вышнеградскому установить, что всегда, уменьшая статизм регулятора, его неравномерность, т. е. приближаясь к астатическому регулятору, мы все более сужаем область параметров, при которых переходный процесс монотонный, и если неравномерность регулятора достаточно мала, то колебания угловой скорости во время переходного процесса становятся неизбежными.

Замечательное исследование, содержащееся в этом дополнительном параграфе, осталось сравнительно мало известным. В теории регулирования стало обычным связывать монотонность переходного процесса с отсутствием комплексных корней у характеристического уравнения. Это дало стимул к разработке так называемых „критериев апериодичности“, устанавливающих условия, необходимые и достаточные для того, чтобы характеристическое уравнение n-й степени имело только отрицательные

---

* Этот параграф помещен на стр. 91 настоящей книги под названием „Дополнения к работе о регуляторах прямого действия“.

действительные корни. Лишь в последние годы в этот вопрос была внесена некоторая ясность: стало очевидным, что переходный процесс может быть монотонный, несмотря на наличие комплексных корней, и что он может иметь колебания с конечным числом размахов, хотя все корни характеристического уравнения действительны. Простое сопоставление этих фактов показывает, в какой мере Вышнеградский опередил свое время в понимании этих, сравнительно тонких, вопросов теории регулирования. Он первый поставил и существенно продвинул вперед задачу об исследовании качества переходного процесса.

Тезисы Вышнеградского, о которых мы упоминали, создали эпоху в теории регулирования промышленных машин, так как, воспринятые после определенной борьбы, они прекратили многочисленные шатания конструкторской мысли в области построения регуляторов прямого действия и в конечном счете заставили инженеров убедиться в практической эффективности исследования устойчивости процесса регулирования методом малых колебаний или, иначе говоря, убедиться в громадном практическом значении теоретических условий самовозбуждения.

Вышнеградский понял, что в полученном им простом соотношении заключается вся настоящая теория управления паровой машиной при помощи обычного центробежного регулятора. Эта идея воодушевляла Вышнеградского. В его работе чувствуется пульс инженерной мысли, выводы работы заострены на преодолении затруднений, встречающихся в инженерной практике. И работа Вышнеградского, появившаяся в критический период, когда преодоление этих затруднений было требованием жизни, сыграла совершенно другую роль, чем работа Максвелла: ее выводы сравнительно быстро сказались на практике машиностроения, заключенные в ней идеи сравнительно быстро нашли продолжателей, распространивших эти идеи на другие типы регуляторов.

3. СИТУАЦИЯ В ОБЛАСТИ РЕГУЛЯТОРОСТРОЕНИЯ И ТЕОРИИ РЕГУЛИРОВАНИЯ К МОМЕНТУ ПОЯВЛЕНИЯ РАБОТЫ ВЫШНЕГРАДСКОГО

Центробежные регуляторы, построенные по принципу регулятора Уатта, честно работали во времена Уатта и в начале XIX в. К середине XIX в. все чаще отмечались трудности при наладке регуляторов, случаи неустойчивости и случаи генерации колебаний. Технические журналы 60-х годов прошлого века содержат описание многочисленных случаев такого рода и жалобы на отсутствие надежно действующих регуляторов.

Почему уаттовские регуляторы перестали работать?

Теперь, после работы Вышнеградского, нам легко в этом разобраться. Машины, которые строил сам Уатт, — это машины низкого давления, маломощные, с небольшим числом оборотов. У них были громадные маховики и легкие регулирующие органы, перемещавшиеся с существенным трением, обусловленным грубым выполнением. Регуляторы времен Уатта имели довольно значительный коэффициент неравномерности, т. е. число оборотов при верхнем и при нижнем положениях муфты было существенно различным. Мы знаем теперь, что все эти обстоятельства обеспечивали выполнение условий устойчивой работы системы машина — регулятор.

В XIX в. развитие техники привело к созданию мощных и значительно более быстроходных машин. Число оборотов увеличилось, и момент инерции маховика уменьшился. Широкое использование машин в промышленности выдвинуло повышенные требования к точности регулирования. Повышение точности регулирования требовало, в свою очередь, уменьшения коэффициента нечувствительности регулятора и его коэффициента неравномерности. Одновременно увеличение мощности регулируемых машин потребовало от регулятора больших перестановочных усилий, т. е. увеличилось усилие, требуемое для перемещения регулирующих органов. Это, в свою очередь, потребовало увеличения массы грузов регулятора.

Мы знаем теперь, что все эти изменения в устройстве регуляторов и регулируемых машин затрудняют выполнение условий устойчивости и способствуют появлению случаев неустойчивости. До Вышнеградского это не было, однако, ясно. Более того, повсеместно считалось, что низкая чувствительность и высокая неравномерность — бич регулирования.

Для повышения чувствительности регулирования принимались специальные меры к уменьшению трений (введение обильной смазки, тщательная обработка трущихся поверхностей, улучшение качества шарниров и уменьшение их числа и т. д.). Многочисленные изменения в конструкции регуляторов были связаны с идеей уменьшения трения и, в частности, устранения явления защемления шарниров под действием кориолисовых сил и тангенциальных сил инерции.

В результате этих мероприятий удалось заметно повысить чувствительность регуляторов и снизить трение в них, а это способствовало нарушению условий устойчивости.

Неправильное направление деятельности инженеров того времени, пытавшихся улучшить регуляторы, еще более ярко видно на примере попыток уменьшить коэффициент неравномерности.

Как мы упоминали, у самого Уатта коэффициент неравномерности был значительным. Пока обращалось внимание лишь на статику регулятора, казалось заманчивым уменьшать коэффициент неравномерности, так как казалось, что при этом возрастала точность поддержания заданного числа оборотов при изменениях нагрузки. Руководимые такой идеей, инженеры предлагали новые конструкции, новые механизмы, отличные от уаттовского, и имеющие меньшую степень неравномерности.

Много таких регуляторов было запатентовано, описано в литературе и построено до тех пор, пока гениальный П. Л. Чебышев не показал, что, оставаясь в пределах конструкций регулятора Уатта, за счет простого излома стержней можно сделать

регулятор с любым, сколь угодно близким к нулю коэффициентом неравномерности.

Многие из этих работ толкали инженеров в совершенно неправильном направлении, наводили на ложный путь — улучшать работу регулятора за счет уменьшения коэффициента неравномерности, стараясь приблизиться к так называемому астатическому регулятору, имеющему коэффициент неравномерности, равный нулю.

Как мы уже говорили, после работы Вышнеградского этот вопрос сделался настолько очевидным, что уже больше никто не говорил об астатических регуляторах, и было покончено с шатанием инженерной мысли в этом вопросе.

Необходимо упомянуть также попытки ряда инженеров и ученых того времени пересмотреть самый принцип уаттовского устройства. Дело в том, что когда регуляторы стали отказывать, то ученые и инженеры заподозрили самый принцип регулятора Уатта и вспомнили об устройствах Понселе (1830) и братьев Сименс (1845), основанных на других принципах. Стало казаться, что сама идея регулятора Уатта порочна. Рассуждали примерно так. Задачей регулятора является поддержание постоянства угловой скорости. Но он начинает действовать только тогда, когда скорость уже изменилась. В силу инерции это изменение скорости запаздывает по отношению к изменению вращающего момента. Следовательно, регулирующее устройство должно начинать действовать немедленно, сейчас же, как только нарушится равновесие моментов. Отсюда появление регуляторов новых типов, принципиально отличных от уаттовского и регулирующих по скорости отклонения регулируемой координаты (по производной) или просто в зависимости от изменения непосредственно замеряемой нагрузки.

Практика показала, однако, что эти новые конструкции были значительно сложнее уаттовских, а во многих случаях работали еще хуже, чем обычные регуляторы Уатта. Поэтому, когда Вышнеградский разъяснил причины неудач с регуля-

торами Уатта, практика повсеместно вернулась к обычным регуляторам Уатта. Но эти попытки вести регулирование по ускорениям или по моментам все же не остались бесплодными. Впоследствии теория подтвердила, что сочетание регулирования по координате (уаттовского) с регулированием по скорости изменения этой координаты (сименсовского), во многих случаях представляет существенные преимущества.

К моменту появления работы Вышнеградского ни один инженер не мог гарантировать, что сделанный им регулятор будет безотказно работать, так как было полное непонимание того, как влияют на динамику регулирования и прежде всего на устойчивость отдельные параметры элементов установки.

Из инженерных работ, посвященных *динамике* регулирования и появившихся до 1876 г., заслуживают упоминания лишь работы Каргля и Вормса де Ромильи*.

Работа Каргля** посвящена теории регулирования машин с отсечкой пара. Приближенными приемами Каргль интегрирует уравнения движения и приходит, в частности, к выводу о непригодности астатических регуляторов. Его рассуждения не строги, влияние трений он не учитывает***. Высказанное им предположение о непригодности астатических результатов получило признание лишь после работы Вышнеградского.

Вормс де Ромильи применил к теории системы машина — регулятор Уатта (не учитывая сил трения) теорию малых колебаний и обнаружил неустойчивость такой системы. Этот парадоксальный результат Вормс де Ромильи не смог удовлетворительно объяснить и высказал предположение, что дело здесь либо в том, что он не учел кулоновского трения, либо

---

* Worms de Romilly. Mémoire sur divers systèmes régulateurs à force centrifuge, Annales des Mines, т. I, Paris, 1872, стр. 36.

** Kargl. Zur Lösung der Regulatorfrage, Civilingenieur, Bd. 17, 1871, стр. 265—296; 386—404.

*** Отзыв Вышнеградского об этой работе Каргля см. на стр. 65.

в том, что сделанное им предположение о непрерывном изменении момента при смещении муфты не может быть положено в основу теории.

Наличие этого парадокса лишило эту работу какой-либо практической ценности и, в частности, не позволило Вормсу де Ромильи выяснить, в какой мере неравномерность регулятора важна для обеспечения устойчивости процесса регулирования, так как у Вормса де Ромильи и статический, и астатический регуляторы оказались в равной мере неустойчивыми.

Таким образом к моменту появления работы Вышнеградского не существовало теории регулирования, способной справиться с теми задачами, которые ставила перед этой теорией практика регуляторостроения.

4. ТЕЗИС ВЫШНЕГРАДСКОГО О НЕОБХОДИМОСТИ КАТАРАКТА И ДИСКУССИЯ, РАЗВЕРНУВШАЯСЯ ВОКРУГ ЭТОГО ТЕЗИСА

Одним из основных выводов работы Вышнеградского является тезис о необходимости катаракта — специального приспособления, создающего вязкое трение — для всякого „чувствительного и правильно действующего регулятора прямого действия“. Этот тезис сразу вызвал возражения, так как инженерам были известны надежно работающие регуляторы, не имеющие катарактов. Некоторые в связи с этим тезисом отвергали всю теорию регулирования Вышнеградского. Другие, убежденные в правильности основных идей, положенных в основу работы Вышнеградского, но не разобравшиеся в его аргументации, создали легенду об „ошибке“ Вышнеградского.

В связи с тезисом Вышнеградского о необходимости катаракта нам придется войти в некоторые подробности, так как острая дискуссия вокруг этого тезиса, развернувшаяся через 10—15 лет после опубликования работы Вышнеградского, заняла определенное место в истории теории регулирования и несомненно повлияла на признание заслуг Вышнеградского,

хотя, конечно, не смогла помешать распространению и практическому использованию заключавшихся в этой работе замечательных идей и выводов.

Вышнеградский отлично понимал, что наличие кулоновского трения в системе регулятор — заслонка существенно сказывается на работе регулятора, создавая так называемую *нечувствительность* регулятора.

Действительно, из-за нечувствительности перемещение регулятора наступает позднее, чем изменение числа оборотов. Нечувствительность регулятора и измеряется тем, насколько должна измениться угловая скорость, чтобы регулятор начал переставлять заслонку. Нечувствительность регулятора — это серьезный бич регулирования, так как наличие нечувствительности приводит к тому, что регулятор как бы выключается в определенной зоне и внутри этой зоны — тем более широкой, чем больше нечувствительность — не может контролировать изменения угловой скорости.

Но, как мы уже говорили, Вышнеградский пренебрег кулоновским трением при исследовании сходимости процесса регулирования и в этом предположении установил тот фундаментальный факт, что система машина — регулятор обладает способностью к самораскачиванию, которое может быть устранено достаточно большим вязким трением в регуляторе. Вышнеградский понимал — это мы сейчас докажем — что кулоновское трение, влияние которого он не учитывал в своей теории, также может, при некоторых условиях, подавить самораскачивание системы машина — регулятор. Однако он считал, что *кулоновское трение, порождающее нечувствительность регулятора, является вредным фактором, который всячески следует уменьшать и который недопустимо использовать для борьбы с самораскачиванием.* Отсюда тезис Вышнеградского о катаракте.

Мы дадим сейчас детальный разбор высказываний Вышнеградского по этому поводу и приведем несколько цитат из его

работы и из его заметки в докладах Парижской Академии. При анализе этих высказываний следует иметь в виду, что Вышнеградский, следуя обычной французской терминологии, называет кулоновские силы трения, возникающие при перемещениях муфты (в муфте, в шарнирах, в заслонке), вредными или пассивными сопротивлениями.

В § 4 своей работы он выписывает уравнения движения, содержащие член, соответствующий этим вредным сопротивлениям, с целью дать определение чувствительности регулятора, отчетливо оговаривая, что этот член будет в дальнейшем отброшен*.

В § 5 Вышнеградский, рассматривая совместно уравнения регулятора и машины, сводит их к одному, продифференцировав то уравнение движения муфты регулятора, в котором, по точному смыслу предыдущего, член с кулоновским трением должен считаться откинутым.

В § 11, подводя итоги своего исследования, он указывает, что хотя наличие кулоновского трения может уменьшить способность системы машина — регулятор к самораскачиванию, но что одновременно то же кулоновское трение приведет к нежелательному уменьшению чувствительности регулятора

---

* И. А. Вышнеградский. О регуляторах прямого действия, стр. 50 этого тома:

„... что касается вредных сопротивлений регулятора и регулирующего прибора, то величины их, приведенные к муфте регулятора, будут, конечно, изменяться вместе с положением муфты, но как эти величины в каждом хорошем регуляторе будут малы, да притом положение муфты также мало переменяется, то их можно считать постоянными: мы их обозначим соответственно через $\lambda AR'$ и $\lambda AR''$, где λ будет ± 1 и его знак будет противоположен знаку $\frac{du}{dt}$. Есть много регуляторов, где эти величины столь малы, что ими можно пренебречь, даже и сравнительно с теми величинами, которые мы сохраняем в качестве величин первого порядка. *Впоследствии это допущение и будет сделано, но в настоящем параграфе мы пока сохраним их*“. (Курсив авторов статьи).

и еще раз с полной отчетливостью напоминает, что кулоновское трение было в его исследовании отброшено *.

Еще более отчетливо Вышнеградский высказывается на эту тему в заметке, напечатанной в Докладах Парижской Академии Наук в 1876 г. В конце этой заметки он прямо говорит, что некоторые регуляторы, не удовлетворяющие условиям устойчивой работы, полученным из его теории, все же могут устойчиво работать за счет наличия кулоновского трения. „Наконец, автор объясняет, что вследствие влияния пассивных сопротивлений, некоторые регуляторы, не удовлетворяющие условию $XY>1$, могут еще эффективно действовать, но тогда эта выгода покупается за счет их чувствительности, которая может быть сохранена только при возможном уменьшении пассивных сопротивлений...“ (см. стр. 39).

В какой же ошибке обвиняли Вышнеградского? Утверждалось, что Вышнеградский не отбрасывал сознательно кулоновское трение, а что оно у него исчезло из окончательных уравнений в силу недосмотра в дифференцировании или, иначе говоря, что Вышнеградский неправильно считал константы интеграции постоянными для всего времени движения регулятора, в то время, как при учете разрывной силы кулоновского трения их следует определять отдельно для каждого размаха регулятора. Утверждалось, что Вышнеградский не имел правильного механического представления о характере действия сил кулоновского трения и поэтому считал эти силы неспособными воспрепятствовать неустойчивости, порождаемой взаимодействием машины и регулятора. Коротко говоря,

---

* „... вредная подвижность регуляторов может быть... уменьшена влиянием вредных сопротивлений, встречающихся при движении регулятора и регулирующего прибора и *которыми мы пренебрегали*, но в регуляторах такого рода уменьшение вредной подвижности соединяется с уменьшением и полезной их подвижности, т. е.: чувствительности, которой... невозможно достигнуть ...иначе, как под условием возможного уменьшения вредных сопротивлений“ (см. стр. 67). (Курсив авторов статьи).

утверждалось, что тезис Вышнеградского о необходимости катаракта является логическим следствием элементарной — математической или механической — ошибки в трактовке правильно поставленной задачи. Это обвинение, как можно было убедиться из изложенного выше, заведомо неправильно.

Повидимому обвинения Вышнеградского в ошибке ведут свое начало от работы французского инженера Лекорню, рассмотревшего вопрос о влиянии кулоновского трения на сходимость процесса регулирования в регуляторе прямого действия *.

Утверждения Лекорню по поводу работы Вышнеградского могут быть сведены к следующим трем пунктам:

1) Вышнеградский не видел, что при наличии разрывного кулоновского трения одни и те же произвольные постоянные в интеграле уравнений движения не могут служить для рассмотрения последовательных размахов регулятора;

2) поэтому Вышнеградский не был в состоянии математически объяснить, почему регулятор без катаракта способен устойчиво работать за счет кулоновского трения;

3) Вышнеградский, не желая впасть в прямое противоречие с фактом существования регуляторов, надежно работающих при отсутствии катаракта, поспешил заявить, без должного основания, что устойчивая работа таких регуляторов покупается за счет их чувствительности.

Последующие авторы, обычно ссылаясь на Лекорню, *заострили* эти утверждения и стали прямо говорить об ошибке Вышнеградского**.

---

* Lécornu. Régularisation du mouvements dans les machines. Paris, 1897, p. 136—138.

** Так, например, у Н. Е. Жуковского мы находим: „Вышнеградский пришел к тому заключению, что все регуляторы неустойчивы и что для их устойчивости к ним необходимо присоединить катаракт... Несмотря на присущую Вышнеградскому тонкость анализа, он сделал ошибку в своем

В чем же здесь дело? Почему Вышнеградского обвиняли в ошибке, которой у него не было? Тут можно указать три обстоятельства. Во-первых, и это может быть самое главное, стиль работы Вышнеградского несколько отличался от обычных математических исследований: если Вышнеградский выписал член с кулоновским трением в § 4 своей работы, то казалось само собою разумеющимся, что он должен его учитывать

исследовании, указанную Лекорню. В полученном Вышнеградским уравнении пропадает член, зависящий от величины постоянного трения. Влияние постоянного трения, которое меняет свой знак при изменении направления движения регулятора, сказывается на произвольных постоянных в интеграле, выражающем перемещение муфты.

Эти постоянные Вышнеградский считает одинаковыми для всего времени колебания регулятора, а между тем их следует определять отдельно для каждого колебания регулятора" (см. Н. Е. Жуковский, „Теория регулирования ходı машин", Москва, 1909).

Весьма близко к Н. Е. Жуковскому излагает вопрос В. Л. Кирпичев, конечно имея в виду Вышнеградского.

„... В первых работах относительно колебаний регуляторов паровых машин не было обращено внимания на то, что в случае постоянного трения мы имеем разрывную величину, откуда следует необходимость рассматривать каждый размах колебания отдельно и пользоваться двумя различными уравнениями.

Оба эти уравнения соединяли в одно и писали их в форме:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}\pm f+kx+z=0. \tag{120}$$

Затем по ходу вывода требовалось найти третью производную $\frac{d^3x}{dt^3}$ для подстановки ее в другое уравнение вопроса... Для нахождения этой величины дифференцировали уравнение (120), причем ошибочно предполагали, что производная члена $\pm f$ как производная постоянной величины будет равна нулю. Этим путем трение совершенно исключалось и не попадало в окончательное уравнение".

(В. Л. Кирпичев. Беседы о механике, С.-Петербург, 1907).

Мы ограничимся этими цитатами, хотя можно было бы привести много других аналогичных цитат как из русских, так и из иностранных работ.

и исследовать в дальнейших параграфах, и не приходило в голову, что этот член может быть в § 5 отброшен без исследования по соображениям, связанным не с математикой, а с техникой. Во-вторых, и это тоже сыграло определенную роль, — вопрос о влиянии кулоновского трения на процесс регулирования Вышнеградский оставил до известной степени в тени, не разъяснил подробно свою точку зрения, которая выясняется лишь при внимательном чтении его статьи и сопоставления утверждений статьи и заметки в «Comptes Rendus». В-третьих, — то обстоятельство, что сам Вышнеградский не принимал никакого участия в этой дискуссии. Через несколько лет после появления своих работ о регуляторах он совсем отошел от научной деятельности, а к моменту появления печатных обвинений с указанием на ошибки в его исследовании, его уже не было в живых. Следует отметить при обсуждении вопроса о мифической ошибке Вышнеградского, что авторы обзоров по истории теории регулирования Хорт*, Мизес**, касаясь результатов, полученных Вышнеградским, нигде не говорят об его ошибке, а продолжатели и пропагандисты идей Вышнеградского — Стодола*** и Тринкс****, упоминая о тех недоумениях, которые сначала вызывал тезис Вышнеградского, спешат разъяснить эти недоумения и взять тезис о катаракте под свою защиту. Что же, в конечном счете, следует сказать о тезисе Вышнеградского?

Катаракт не был изобретен Вышнеградским. Для астрономических регуляторов, как мы видели, его использовал

---

* W. Hort. Die Entwicklung des Problems der stetigen Kraftmaschinenreglung nebst einem Versuch der Theorie unstetiger Reglungsvorgänge, Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 50, H. 3, стр. 233, 1904.

** R. Mises. Enzyklop. der Mathematischen Wissenschaften, 1907.

*** A. Stodola. Turbinenregulierung, Schweiz. Bauzeitung, XXII. № 17—20, 1893; XXIII, № 17—18, 1894.

**** Trinks. Governors and the govering of prime movers, London, 1919.

уже Эри. Однако Эри не дал теории действия катаракта. Максвелл, учитывая влияние отклонения шаров регулятора на приведенный момент инерции маховика, не мог вскрыть необходимости трения для правильной работы регулятора, управляющего обычной паровой машиной. Именно Вышнеградский впервые отчетливо выявил роль трения в основной схеме регулирования паровой машины и заострил свои выводы в виде тезиса о катаракте.

Конечно, ситуация фактически оказалась более сложной, чем, повидимому, представлял ее себе Вышнеградский. Оказалось, в противоположность мнению Вышнеградского, которое мы цитировали, что кулоновское трение, обеспечивая сходимость процесса регулирования, во многих случаях порождает лишь такую нечувствительность регулятора, которая вполне терпима на практике. Но вряд ли следует за этот, все же второстепенный, промах строго судить Вышнеградского, который стремился снабжать паровые машины наилучшими регуляторами, но практически имел дело, с нашей точки зрения, с тихоходными машинами, громадными маховиками, грубыми регулирующими устройствами. И если мы, следуя Стодоле, сформулируем тезис Вышнеградского так: „без трения нет регулятора“,* то мы должны будем признать, что этот тезис лежит в основе современной теории регулирования.

5. ТЕОРИЯ НЕПРЯМОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ И РАБОТЫ А. СТОДОЛЫ

Аурель Стодола (1859—1942), впоследствии создатель научной теории паровых и газовых турбин, в 1893—1899 гг. распространил линейный анализ Вышнеградского на непрямое регулирование, а также на прямое регулирование, осуществля-

* С чисто технической стороны существенно еще и то, что работа регулятора, снабженного катарактом, сильно зависит от температурных условий, в связи с изменением вязкости масла при изменении температуры.

емое так называемыми инерционными регуляторами. Кроме того, Стодола окончательно разъяснил недоразумения, возникшие в связи с тезисом Вышнеградского о катаракте.

Регулятор Уатта — простейший регулятор прямого действия. Здесь перестановка заслонки, управляющей поступлением пара в машину, производится при помощи системы рычагов самим чувствительным элементом — центробежным маятником. Но в мощных машинах, там, где для перестановки заслонки или аналогичного приспособления требуется большая сила, устраиваются так называемые регуляторы *непрямого* действия. В них перестановку заслонки совершает не сам чувствительный элемент, а особый двигатель — *сервомотор,* обладающий достаточной силой и имеющий обычно самостоятельный источник энергии, а чувствительный элемент лишь управляет этим сервомотором, переставляя, например, золотник в гидравлических сервомоторах или движок реостата в электрических сервомоторах.

В 1893 г. в тогда еще мало известном журнале „Schweizerische Bauzeitung" появляется работа А. Стодолы „О регулировании турбин. I", а в следующем, 1894 г., в том же журнале — ее продолжение „О регулировании турбин. II". Эти работы, которые можно считать двумя частями одного исследования, посвященные регулированию водяных турбин, заслуженно считаются классическими. В эти годы особое значение для развития теории регулирования перестало играть регулирование паровых машин. Громадное влияние на практику и теорию регулирования в это время оказали рост и развитие гидравлических машин. Электрическая энергия до 1891 г., т. е. до создания М. О. Доливо-Добровольским знаменитой линии передачи с высоким к. п. д. от Лауфенского водопада до Франкфурта на Майне еще не передавалась по проводам на значительные расстояния, и гидравлические машины обслуживали отдельные трансмиссии или отдельные исполнительные механизмы.

После появления линий электропередач гидравлические машины стали быстро развиваться, и почти параллельно с их развитием и увеличением их мощности шло развитие теории и практики автоматического регулирования.

В 1885 г. появилась работа Леоте *, занимавшегося регулированием водяных турбин. Леоте был гидравликом. Имея дело с машинами, обладающими значительным *саморегулированием*, он совершенно иначе представлял себе всю проблему регулирования, чем Вышнеградский. В случае Вышнеградского регулятор *создавал* характеристику паровой машины. В случае Леоте, как и в случае Максвелла, регулятор *использовал* существующую характеристику машины. Можно сказать и так: Леоте искал способы регулирования турбины по их характеристикам, клал в основу наличие резко выраженного саморегулирования. Леоте имел дело с регуляторами *непрямого действия*, которые к этому времени прочно вошли в практику гидравлических установок, так как для передвижения заслонок здесь уже требовались значительные усилия. Но это были *примитивные* регуляторы непрямого действия, у которых *скорость* перемещения заслонки зависела лишь от смещения муфты чувствительного элемента.

Леоте не мог принять *линеаризацию* уравнений движения, которую с таким успехом использовал Вышнеградский, так как Леоте на практике, при работе с примитивными регуляторами непрямого действия в гидравлических устройствах, видел наличие таких явлений, которые *нельзя объяснить линейно* и которые для своего объяснения и расчета требуют учета нелинейностей, наличия „мертвых зон“ в характеристике сервомотора и кулоновского трения в чувствительном элементе.

---

* M. H. Léauté. Mémoire sur les oscillations á longues périodes dans les maschines actionnées par des moteurs hydrauliques et sur les moyens de prévenir ces oscillations. Journal de l'école Polytechnique, 1885.

Результаты Леоте представляют фундаментальный интерес для теории регулирования. Его работа, так же как и работа Вышнеградского, является классической: она заложила основы нелинейной теории регулирования. Но эти нелинейные факторы заслонили от Леоте роль регулятора как создателя характеристики машины. При этом Леоте не почувствовал, что влияние нелинейных факторов может быть фундаментально уменьшено, иногда почти сведено на-нет разумной схемой регулирующего устройства. Леоте не оценил работы Фарко*, который примерно за десять лет до Леоте натолкнулся на замечательную идею жесткой обратной связи, идею „порабощения" мотора, переставляющего заслонку, которая для непрямого регулирования восстанавливает зависимость *положения* заслонки от *положения* муфты чувствительного элемента, которая характерна для основной схемы прямого регулирования.

Это изобретение Фарко позволило сконструировать регуляторы непрямого действия, гораздо более надежные в работе, чем те, с которыми имел дело Леоте. Нелинейные факторы перестали в них играть фундаментальную роль, которую они играли в случае Леоте, и подготовили почву для работ Стодолы.

Стодола впервые дал линеаризованную теорию *непрямого* регулирования.

До Стодолы в теории непрямого регулирования работали в основном с так называемыми сервомоторами постоянной скорости, а следовательно, имели дело со сложной *нелинейной* проблемой. Стодола, в духе Вышнеградского, начал мужественно оперировать линейными уравнениями и для сервомотора и на этом пути получил результаты выдающегося значения. Этот важный шаг, на который не решались пойти предшественники Стодолы, пытавшиеся с бо́льшим или меньшим успехом учитывать влияние нелинейности характеристики (зоны нечувствительности, разгонного участка и др.), сразу дал ему возмож-

* Farcot. Le servo-moteur ou moteur-aservi, Paris, 1873

ность подчинить всю схему непрямого регулирования теории малых колебаний.

Стодола в этих работах о турбинах выступает как прямой продолжатель и последователь Вышнеградского. В первой части работы, где рассматривается идеальный регулятор (т. е. регулятор без инерции и без трения), Стодола прямо сводит задачу к уравнению, исследованному Вышнеградским, и, ссылаясь на работу Вышнеградского, ведет его дискуссию. Во второй части работы, где речь идет об учете действия инерции масс регулятора и о влиянии катаракта, Стодола особо подчеркивает связь своей работы с работой Вышнеградского, указывая, что работа Вышнеградского во многом определила ход его рассуждений („Auf die Wichtigkeit der Kataraktes ist insbesondere von Wischnegradsky in der citirten Abhandlung, welche dem hier befolften Gedankengang in mehrfacher Beziehung zu Grunde liegt, hingewiesen“).

Стодоле, занимавшемуся теорией регулирования водяных турбин, пришлось рассматривать сложные системы регулирования, включающие распределенное звено — трубопровод. И хотя именно Стодоле удалось дать замечательный приближенный анализ влияния трубопровода на процесс регулирования водяной турбины, все же вопрос об устойчивости системы регулятор — сервомотор — трубопровод — воздушный колпак — турбина свелся у него к исследованию корней характеристического уравнения *высокой* (шестой) степени. Лишь в некоторых простейших случаях, обязательно при отбрасывании массы регулятора, характеристическое уравнение системы является кубическим. Эти элементарные случаи Стодола решает, как мы отметили, следуя Вышнеградскому. Но у Вышнеградского нет ничего, если дело идет об уравнениях степени выше третьей, и Стодола, не зная работ Максвелла и Раута, обращается к своему товарищу по Цюрихскому Политехникуму математику А. Гурвицу с просьбой найти необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять коэффициенты много-

члена n-й степени, чтобы все корни этого многочлена имели отрицательные действительные части.

Гурвиц, опираясь на работу Эрмита, относящуюся еще к 1867 г., находит в 1893 г. такие условия в элегантной детерминантной форме (эти условия сейчас называются условиями Раута — Гурвица), и воспользовавшись ими, Стодола доводит свое исследование до конца, т. е. до буквенных неравенств, в которые легко подставить числовые значения.

Эти буквенные неравенства дают условия устойчивой работы, т. е. условия отсутствия самовозбуждения колебаний. Для придания расчетам большей наглядности Стодола вводит в уравнения в качестве зависимых переменных безразмерные величины, характеризующие соответственно относительную величину перемещений муфты регулятора, золотника сервомотора, заслонки и изменение угловой скорости и т. д. Тогда коэффициенты при производных в этих уравнениях имеют размерность времени и допускают простую физическую интерпретацию. Результаты, полученные Стодолой в области теории регулирования турбин, были тщательно сверены с экспериментами. Эти эксперименты были проверены на нескольких установках и дали замечательное согласие с теорией, по крайней мере в отношении влияния на устойчивость параметров системы (объема воздушного колпака, момента инерции колеса турбины и т. д.).

Следующая фундаментальная работа Стодолы в области регулирования „Принцип регулирования Сименсов и американские инерционные регуляторы“, появившаяся в 1899 г., относится к теории прямого регулирования.

Здесь Стодола дает в простой и изящной форме теорию так называемых *инерционных* регуляторов прямого действия, в которых, кроме центробежных сил инерции, как в обычных центробежных регуляторах, действуют еще и тангенциальные силы инерции, т. е. имеет место комбинированное регулирование по регулируемой координате и по производной регулируе-

мой координаты (в данном случае по угловой скорости и угловому ускорению).

Он показывает, что в случае отбрасывания кулоновского трения исследование устойчивости системы машина — инерционный регулятор приводится к исследованию корней кубического уравнения и указывает, как должны быть изменены тезисы Вышнеградского, если речь идет об инерционных регуляторах. Именно, он показывает, что введение дополнительного воздействия по угловому ускорению позволяет обеспечить условия устойчивости при астатическом регуляторе, если только в регуляторе есть трение.

В этом более сложном случае Стодола использует диаграммы, являющиеся непосредственным обобщением диаграмм Вышнеградского, откладывая по осям безразмерные параметры, которые он называет „Wischnegradskyschen Kennzahlen der Regulierung".

Здесь же Стодола приближенно подсчитывает, как сказывается кулоновское трение* на устойчивости движения системы машина — регулятор прямого действия, и затем подробно разъясняет этот важный пункт, оставленный Вышнеградским в тени и лишь слегка задетый самим Стодолой в работе о регулировании водяных турбин.

Можно сказать, что здесь Стодола окончательно разъяснил этот вопрос для широких кругов инженеров, дав простой и наглядный вывод достаточных условий, при которых кулоновское трение *в отсутствии вязкого трения* обеспечивает сходимость процесса регулирования.

---

* Первое приближенное решение этого вопроса было дано Бегтрепом (I. Begtrup, Theory of steam Engine Go ernors. „American Mashinist", 1893, 1894), затем Толле (M. Tolle, z. d. VDI, 1895) и Лекорню (L. Lecornu, Régularisation du mouvement dans les machines. Paris, 1897).

После Стодолы этой же проблеме был посвящен еще ряд работ: Мизеса (1908), Жуковского (1909), Рериха (1924), Николаи (1928) и др.

Стодола начинает с указания, что работа Вышнеградского, содержавшая тезис о катаракте, „была встречена многочисленными сомнениями, которые обосновывались ссылками на многие, хорошо работающие регуляторы, не имевшие катарактов". Далее Стодола берет под свою защиту тезис Вышнеградского и утверждает, что сомневающиеся „проглядели, что в таких регуляторах или в их перестановочных органах всегда имеются налицо некоторые силы трения, которые при возникновении колебаний поглощают живую силу массы регулятора, т. е. демпфируют колебания: таким образом безусловно остается в силе закон, что регулирование невозможно без определенного демпфирования..."

Интересно отметить, что идея Вышнеградского о необходимости исследования качества переходного процесса также была воспринята и развита дальше Стодолой. В своей работе о регулировании турбин Стодола говорит о необходимости в некоторых случаях проводить исследование переходного процесса, чтобы убедиться в приемлемости выбранных числовых параметров регулятора трубопровода и турбины. В работе, посвященной инерционным регуляторам, Стодола уделяет много места максимальной скорости, имеющей место за время переходного процесса, и строит специальные диаграммы (для астатического инерционного регулятора), при помощи которых можно найти эту максимальную скорость с минимумом выкладок.

Эту работу Стодолы можно рассматривать как завершающую основные оригинальные работы в области классической линеаризованной теории регулирования. В частности, в работе есть ясные указания, как использовать в вопросах регулирования общую теорию малых колебаний системы вокруг установившегося движения, для построения линеаризованной теории любой, сколь угодно сложной системы регулирования.

Резюмируя заслуги Стодолы в области теории регулирования, можно сказать, что Стодола распространил инженер-

ную теорию регулирования Вышнеградского, относившуюся к регуляторам прямого действия, на всю громадную область непрямого регулирования и придал ей ту форму, которая, в основном, удержалась вплоть до настоящего времени. А разъяснением действия сил кулоновского трения на процесс регулирования и многочисленными опытами, поставленными для проверки выводов теории, Стодола окончательно убедил инженеров не только в динамической правильности основ линеаризованной теории, но и в ее исключительной практической эффективности.

6. ВЛИЯНИЕ РАБОТ МАКСВЕЛЛА, ВЫШНЕГРАДСКОГО И СТОДОЛЫ НА ПОСЛЕДУЮЩЕЕ РАЗВИТИЕ ТЕОРИИ РЕГУЛИРОВАНИЯ

Работа Максвелла „О регуляторах“, как мы уже упоминали, осталась почти незамеченной инженерами и не сыграла поэтому *непосредственно* заметной роли в развитии теории регулирования. Но работа Максвелла индуцировала трактат Раута „Об устойчивости заданного состояния движения“* и через эту последнюю работу оказала определенное влияние на развитие теории автоматического регулирования и управления.

Существенное влияние идей Максвелла на трактат Раута, получивший премию Адамса в Кэмбриджском Университете в 1877 г., как и на некоторые предшествующие работы Раута, может быть легко установлено. Не говоря уже о том, что Максвелл входил в состав комиссии, выдвинувшей на соискание премии Адамса в 1877 г. тему „Критерии динамической устойчивости“, само содержание работы Раута свидетельствует, что ее следует рассматривать как дальнейшую разработку идей и приемов Максвелла, заключающихся в работе, относящейся к кольцу

* В меньшей степени трактат Раута связан с „Натуральной философией“ Томсона и Тэта, первое издание которой вышло в 1867 г., хотя и эта книга оказала влияние на труд Раута.

Сатурна и, в особенности, в работе, посвященной регуляторам. В частности, Раут в своем трактате дал решение задачи Максвелла о необходимых и достаточных условиях, которым должны удовлетворять коэффициенты алгебраического уравнения n-й степени, чтобы все его корни имели отрицательные действительные части. Именно Раут указал алгоритм, который позволяет последовательно найти эти условия для любого n.

Раут довел исследование устойчивости установившихся движений до той степени автоматизма, когда решение той или иной конкретной неконсервативной задачи не требует каких-либо умственных усилий, а может быть проведено по раз навсегда установленному шаблону.

Однако принципиальная сторона работы Раута неудовлетворительна. Ни у Максвелла, ни у Раута нет точного определения понятия „устойчивость движения“ и нет сколько-нибудь удовлетворительного обоснования законности линеаризации уравнений движения при отыскании условий устойчивости.

Точное определение понятия „устойчивость движения“ было дано лишь А. М. Ляпуновым в 1892 г., и им же были найдены условия, при выполнении которых становится законной — для установления „устойчивости по Ляпунову“ — линеаризация уравнений движения. Для случая установившихся движений, когда линеаризованные уравнения имеют постоянные коэффициенты, эти условия сводятся к тому, чтобы были отрицательны действительные части всех корней соответствующего характеристического уравнения.

Хотя это понятие „устойчивости по Ляпунову“, имеющее фундаментальное значение в теории дифференциальных уравнений, связано со сколько угодно малыми отклонениями и в ряде пунктов не отвечает тому понятию об устойчивости движения, которое непосредственно интересует практику, нужно считать, что лишь с появлением диссертации А. М. Ляпунова работы по теории регулирования, основанные на исследовании устойчивости движения при помощи линеаризован-

ных уравнений, получили настоящее математическое обоснование.

Все основные результаты трактата Раута с рядом дополнений вошли в книгу Раута „Высшая динамика твердых тел" (1877)*, которая потом многократно переиздавалась, и получила широкое распространение.

Общие рецепты исследования устойчивости установившихся движений, изложенные в этой книге, оказали существенное влияние на математическую и механическую сторону теории автоматического регулирования и управления.

Начиная с работы Стодолы 1899 г., на эту книгу Раута появляются ссылки в статьях по автоматическому регулированию и управлению и, наконец, условия отрицательности действительных частей алгебраического уравнения n-й степени, которыми сплошь и рядом приходится пользоваться в теории регулирования и задача отыскания которых была впервые поставлена Максвеллом в связи с проблемами регулирования, получают название *условий Раута — Гурвица*.

При этом следует, однако, иметь в виду, что в области конкретной теории регулирования, в понимании того, какие факторы *на практике* обусловливают устойчивую работу реальной паровой машины, снабженной регулятором, Раут не пошел существенно дальше Максвелла**.

Перейдем теперь к Вышнеградскому. Мы уже отмечали

---

* E. Routh. Advanced Part of the Dynamics of the System of Rigid Rodies, London, Macmillan, 1877.

** Даже в тех изданиях своей книги, которые относятся к XX в., Раут позволяет себе рекомендовать астатический регулятор Уатта для машины без саморегулирования, наделив такую систему устойчивостью за счет учета изменения момента инерции главного вала при расхождении шаров регулятора.

См. также ядовитые замечания Тринкса в предисловии к книге Trinks. Governors and the governing of prime movers (New York, 1919) по поводу непонимания Раутом динамики обычного процесса регулирования.

то фундаментальное влияние, которое оказала работа Вышнеградского о регуляторах прямого действия на работу Стодолы и на всю линеаризованную теорию регулирования. Сейчас мы хотим особо остановиться на вопросе о признании заслуг Вышнеградского в мировой технической литературе, прежде всего в русской.

В момент своего появления работа Вышнеградского была сочувственно встречена в России*, в частности, и потому, что его имя пользовалось тогда большой популярностью в русских технических кругах. Несомненно, что Вышнеградский привлек внимание русских инженеров к вопросам регулирования, и в последние десятилетия XIX в. в России был опубликован ряд работ, посвященных теории регулирования (Котурницкий, Сидоров, Гречанинов, Грдина и др.), из которых некоторые, напр. работы Грдина, содержали существенные научные результаты.

Работа Вышнеградского, опубликованная почти одновременно на русском, французском и немецком языках, сразу же получила известность за границей — в Германии, во Франции и в Америке.

Мы не будем повторять уже сказанное о Стодоле, как о продолжателе и пропагандисте идей Вышнеградского. Но следует указать, что даже те авторы, которые оспаривали тезис Вышнеградского о катаракте и полемизировали с Вышнеградским, все же не могли не отметить некоторых выдающихся достоинств работы Вышнеградского и таким образом содействовали распространению заключавшихся в ней идей.

Через несколько лет после появления работы Вышнеградского каждый грамотный инженер, занимавшийся наладкой и конструированием регуляторов, стал понимать, что увеличение массы регулятора и уменьшение неравномерности вредно влияют на сходимость процесса регулирования. Отчетливое

---

* См. речь Гадолина, стр. 305.

понимание влияния трения на сходимость процесса регулирования и понимание смысла тезиса Вышнеградского о катаракте пришло несколько позднее — через 15—20 лет после появления его работы. Но и в том и в другом случаях это понимание пришло в связи с работой Вышнеградского и в связи с той острой дискуссией, которая возникла по поводу этой работы.

Переходя к развитию теории регулирования в первые два десятилетия XX в., прежде всего необходимо отметить появление в 1905 г. первого издания книги Толле „Регулирование двигателей“ *, которая быстро распространилась среди инженеров-машиностроителей Германии, а отчасти России.

В этой книге, явившейся для своего времени хорошим курсом теории регулирования машин, основное место уделено линеаризованной теории регулирования. Но вопросы, связанные с историей теории регулирования, в этой книге почти не затрагиваются, и книга не содержит даже необходимых ссылок на первоисточники. Толле, несомненно знакомый с работой Вышнеградского, не упоминает его имени даже там, где излагает результаты его работы, ничего не говорит о работе Максвелла и лишь упоминает о работах Стодолы.

Однако, по сути дела, не упоминая фамилии Вышнеградского, книга Толле пропагандирует идеи Вышнеградского, распространяя их не только на непрямое регулирование при помощи сервомотора с жесткой обратной связью, что было сде-

---

А. Сидоров. Плоские регуляторы быстроходных машин, Москва, 1895.

Я. И. Грдина. Движение регулятора прямого действия и его устойчивость. Вестник О-ва технологов, № 4, 5, 6—7, 1898. Его же. О некоторых типах регуляторов с двухгрузовым маятником. Вестник О-ва технологов, № 7, 1899 и др.

А. В. Гречанинов. Задача об устойчивости движения машины, управляемой регулятором прямого действия. Вестник О-ва технологов, № 7 и 9, 1899. Его же. Об устойчивости движения регуляторов. Технич. сборник и Вестник промышленности, № 1, 3, 4, 6 и 10, 1896.

* Tolle. Regelung der Kraftmaschinen, Berlin, J. Springer, 1905.

лано еще Стодолой, но и на так называемое *изодромное* регулирование, позволяющее сочетать малую неравномерность или, теоретически, астатизм регулирования с высокой степенью устойчивости движения.

К 1910 г. в связи с развитием машиностроения в России значительно усиливается интерес к теории регулирования. Но к этому времени деятельность Вышнеградского в области теории регулирования оказалась уже основательно забытой, и русские инженеры начали изучать теорию регулирования по книге Н. Е. Жуковского „Теория регулирования машин“ (1909) и, отчасти, по только что упоминавшейся книге Толле.

Гениальный механик, один из создателей аэрогидродинамики Н. Е. Жуковский начал систематически заниматься теорией регулирования около 1903 г., хотя ему и раньше приходилось сталкиваться с различными вопросами теории регулирования в беседах с преподавателями Московского Высшего Технического Училища, в частности, в беседах с профессором А. И. Сидоровым. Результатом работы Жуковского в этой области было несколько факультативных курсов по теории регулирования, прочитанных им в Московском Университете в 1906—1909 гг., и курс „Теория регулирования хода машин“, посвященный регуляторам прямого действия и прочитанный им в 1908/1909 учебном году в Московском Высшем Техническом Училище. Литографированные студенческие записки этого последнего курса, предназначавшиеся для слушателей автора, получили широкую известность в России.

„Теория регулирования хода машин“ представляет замечательно ясное, простое и доходчивое изложение классической теории регуляторов прямого действия, снабженное в ряде мест существенными и оригинальными дополнениями. Эти дополнения, из которых наиболее интересны „Видоизменение анализа Лекорню“, где исследуется нелинейная задача о влиянии кулоновского трения на процесс прямого регулирования, и „Интегрирование разностных уравнений, описывающих динамику

регулятора при регулировании на отсечку пара", не были опубликованы Н. Е. Жуковским в виде отдельных работ, но, повидимому, составили основное содержание двух докладов, сделанных Н. Е. Жуковским Московскому математическому обществу весной 1903 г.

Результаты Жуковского, изложенные в первом дополнении, позволяют, в частности, быстро найти (с некоторым запасом) величину кулоновского трения в сочленениях регулятора, при котором процесс регулирования сходится. Результаты Жуковского, изложенные во втором дополнении, имеют существенное значение для расширения круга объектов, которые охватываются условиями Вышнеградского. Жуковскому удалось строго доказать, что к числу таких объектов безусловно относятся и паровые машины, регулируемые изменением отсечки пара, если их угловая скорость достаточно велика.

Заметим, что Жуковский не отмечает значения работы Вышнеградского в создании теории регулирования. Это происходит, во-первых, в связи с тем, что историческая часть вообще отсутствует в этих лекциях, а во-вторых, в связи с тем, что Жуковский, повидимому, не знакомый с самой работой Вышнеградского, а знавший о содержании этой работы по многочисленным полемическим статьям и высказываниям (в частности, проф. А. И. Сидорова), был уверен, что Вышнеградский допустил в ней серьезную математическую ошибку (см. сноску на стр. 279).

Начиная с осени 1909 г., Жуковский перестал заниматься теорией регулирования и, насколько нам известно, больше к ней не возвращался*.

* Вопросы динамики машин привлекли внимание одного из выдающихся русских инженеров и деятелей русской Высшей Технической Школы В. Л. Кирпичева, учителем которого был Вышнеградский. С 1903 г. В. Л. Кирпичев систематически вел факультативные лекции („беседы") по вопросам теоретической и прикладной механики, в частности, по теории уравновешивания машин и по теории регуляторов, для молодых препода-

Во французском руководстве Лекорню, вышедшем в 1904 г.*, работа Вышнеградского излагалась подробно, хотя это изложение сопровождалось некоторыми критическими замечаниями.

Существенно иное положение вещей мы обнаруживаем у Хорта** — автора одного из немногих обзоров по истории теории регулирования и автора известной книги по теории колебаний, который, излагая работы Максвелла, Вышнеградского и работу Стодолы об инерционных регуляторах, особо выделяет работу Вышнеградского, считая ее лежащей в основе современной теории регулирования и сожалея, что эта работа не получила той известности, которую заслуживала.

Примерно аналогичную позицию занимает американец Тринкс*** — автор известного руководства по теории регулиро-

вателей СПб. Политехнического Института. Однако не весь материал этих факультативных бесед был опубликован, и в известной книге В. Л. Кирпичева „Беседы о механике" теории регулирования посвящено лишь несколько отрывочных замечаний. В. Л. Кирпичев имел ряд выдающихся сотрудников, и один из этих сотрудников (К. В. Рерих) дал несколько существенных работ в области теории регулирования. Но эти работы увидели свет, а частью и были выполнены уже после Октябрьской революции.

* L. Lecornu. Les régulateurs des machines à vapeur, Paris, Dunod, 1904.

** W. Hort. Die Entwicklung des Problems der stetigen Kraftmaschinenreglung nebst einem Versuch der Theorie unstetiger Reglungsvorgänge. Zeitschr. für Math. und Physik, 1904, Bd. 50, стр. 233—279.

На стр. 243 Хорт говорит: „Работа Вышнеградского «О регуляторах прямого действия» должна считаться основополагающей для современной теории регулирования" („Als grundlegend für die heutige Reglungstheorie betrachtet werden muss", стр. 243). Далее, в этой же статье, Хорт говорит о тезисах Вышнеградского следующее: „В этих положениях содержится вся теория непрерывных регуляторов прямого действия" („In diesen Sätzen ist die ganze Theorie der stetig und direkt wirkenden Regler enthalten").

*** W. Trinks. Governors and the governing of prime movers, London, Pittsburgh, 1919.

Тринкс утверждает, что теория Вышнеградского является основой, на которой строятся современные теории регулирования („...his publications are the foundation upon which modern theories of governing are built").

вания, сыгравшего для стран, говорящих по-английски, в частности, для Америки, роль, близкую к той, которую руководство Толле сыграло для Европы.

Тринкс, отмечая работы Максвелла, Вышнеградского и Стодолы, особо подчеркивает ценность работы Вышнеградского, утверждая, однако, что она не была понята и усвоена инженерами как по причине абстрактно-математической формы изложения, так и потому, что она не давала объяснения некоторым известным фактам, противоречащим теории*.

Несомненно, что и Хорт, и Тринкс, как и многие десятки менее известных авторов, занимающих сходную позицию, неправильно представляют себе историю вопроса.

Верно, что работа Вышнеградского положила основание современной теории регулирования. Неверно, что она осталась незамеченной инженерами и не оказала влияния на практику регуляторостроения. Эти авторы просмотрели, что Стодола в своих сделавших эпоху работах по линеаризованной теории непрямого регулирования действовал как последователь Вышнеградского и опирался на результаты Вышнеградского** и что Толле в области динамики регулирования в конечном счете явился лишь компилятором и педагогом, изложившим в ясной, доходчивой форме результаты ряда работ своих предшественников, прежде всего Вышнеградского и Стодолы.

Чтобы дать законченную картину положения дела с линеаризованной теорией регулирования в первые два десятилетия XX в., сделаем еще несколько замечаний.

* Здесь речь идет о наличии исправно действующих регуляторов, не снабженных катарактом.

** Отметим, что даже авторы (Лекорню и др.), которые не забывают отметить влияние идей и результатов Вышнеградского на работу Стодолы об инерционных регуляторах, проходят мимо гораздо более существенного для понимания истории теории регулирования факта влияния Вышнеградского на работы Стодолы по регулированию водяных турбин, в которых впервые была дана линеаризованная теория непрямого регулирования.

К 1910 г. вместо обычного непрямого регулирования получило повсеместное распространение так называемое изодромное регулирование, о котором у нас уже была речь. Приложение линеаризованной теории к изодромному регулированию явилось еще одним свидетельством ее эффективности. Инженеры стали стремиться к уменьшению, или, там, где это возможно, к практическому уничтожению кулоновских трений, мертвых ходов, перекрытия золотников и других факторов, обусловливающих нелинейность, с целью избавиться от непредвиденных осложнений при наладке систем регулирования и с целью получить уверенность в надежности расчета системы при помощи ставшей привычной линеаризованной теории.

Все это содействовало укреплению позиций линеаризованной теории. Именно в это время все нелинейные факторы* получили название „вторичных“ факторов, осложняющих процесс регулирования, подчиняющийся линейной теории.

Одновременно линеаризованная теория регулирования, возмужавшая в основном на вопросах регулирования числа оборотов, получила новые обширные области применения.

Здесь следует отметить регулирование электрических машин, где наряду с регулированием чисел оборотов пришлось иметь дело с регулированием различных электрических величин, например, напряжения, а также регулирование температуры, давления, расхода и т. д.

---

* Позже, по мере увеличения требований к точности и быстродействию систем, выяснилось, что эти „вторичные“ факторы могут существенно влиять на процесс регулирования. Кроме того, некоторые классы регуляторов (регуляторы типа „да-нет“, регуляторы, работающие на отсечку, прерывистые регуляторы, вибрационные регуляторы и т. д.) вообще не могут быть удовлетворительно описаны линейными дифференциальными уравнениями. Поэтому наряду с линейными задачами теории регулирования внимание исследователей было привлечено к нелинейным задачам теории регулирования. Основоположным работам по нелинейным задачам теории регулирования будет посвящен отдельный том серии „Классики науки“.

Автоматическое управление и регулирование начало интенсивно проникать в различные области военной, в частности, военно-морской техники, начиная с устройств, стабилизирующих курс торпеды, и кончая автоматическими устройствами для поворота орудийных башен — первоначальными образцами будущих следящих систем.

Во всех этих областях линеаризованные уравнения были положены в основу теоретических расчетов, и эти расчеты привели к выводам, имеющим фундаментальное практическое значение.

В наши дни мы являемся свидетелями нового исключительного расцвета научной деятельности в области теории регулирования. Этот расцвет связан, во-первых, с широким проникновением всевозможных автоматических устройств в различные области гражданской и военной техники. Во-вторых, он связан с непрерывным усовершенствованием этих устройств и с повышением требований к их точности и быстродействию, делающем почти безнадежным проектирование таких устройств без помощи теории.

Несмотря на то, что уровень техники автоматического управления и регулирования в наше время несоизмерим с тем, который был во времена Вышнеградского, идеи, связанные с линеаризованной теорией регулирования, являются ведущими и для большинства новых исследований. Тем более существенно отметить, что в противоположность многим старым руководствам и курсам — в частности курсу Тринкса, о котором уже была речь, в работах и курсах, изданных в последние годы за границей, в особенности в Америке*, роль работы Вышнеградского в издании теории регулирования не отмечается и даже имя его не упоминается.

---

* См., например: Branh and Conpball, Principles of Servomechanisms, New York, John Wilcy, 1948; James, Nichols, Phillips, Theory of Servomechanisms, New York, Mc — Graw—Hill, 1947; Smith, Automatic Control Engineering, New York, Mc — Graw — Hill, 1944.

В последние годы начался процесс слияния линеаризованной теории регулирования с линеаризованной теорией многозвенных усилительных устройств. Особенно заметно и особенно плодотворно это слияние в области теории следящих систем, где оно зашло весьма далеко.

Существенная роль в новом расцвете теории автоматического регулирования принадлежит советским ученым. Однако анализ научных работ в области теории регулирования, выполненных за последние тридцать лет, выходит за пределы настоящего очерка.



ОТЧЕТ О ВЫСТУПЛЕНИЯХ И. А. ВЫШНЕГРАДСКОГО и А. В. ГАДОЛИНА

НА ЗАСЕДАНИИ II ОТДЕЛА ИМПЕРАТОРСКОГО РУССКОГО ТЕХНИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА ОТ 8 ЯНВАРЯ 1877 г. *

Сообщение Ивана Алексеевича Вышнеградского „О регуляторе прямого действия“ (извлечение)

В сообщении этом докладчик изложил свои исследования, относящиеся к регуляторам прямого действия и имеющие целью открытие общего характера и главнейших свойств весьма сложного движения, принимаемого регулятором машины двигателя, когда существующее в ней равновесие между движущей силой и сопротивлением, вследствие какой бы то ни было причины, нарушается.

Для возможного упрощения задачи в основание всего исследования положены следующие предположения:

а) касательно устройства и способа действия машины допущено, что она имеет вращательное движение, под влиянием движущего усилия и сопротивления непрерывно действующих на постоянных плечах относительно оси вращения, причем предположено, что напряжение движущего усилия изменяется только вследствие действия регулятора;

б) относительно устройства регулятора сделано предположение, что он будет прямого действия, т. е. что он снабжен органом, который при изменении скорости машины приходит в прямолинейное движение и, будучи соединен с прибором,

---

* Из записок Имп. Русск. Техн. Об-ва, вып. 4, СПб., 1877, стр. 308—311.

назначенным для изменения напряжений движущего усилия, производит это изменение;

в) наконец, предположено для большей полноты и общности исследования, что регулятор снабжен катарактом, т. е. прибором, который приходит в движение вместе с муфтой регулятора и производит при этом на муфту давление, зависящее от ее скорости и противоположное направлению ее движения.

Как известно, в виде такого катаракта обыкновенно употребляется поршень, который может двигаться в закрытом с обоих концов цилиндре, наполненном жидкостью, которая при движении поршня вытесняется с одной его стороны на другую, проходя при этом через отверстие, которое можно регулировать по произволу.

Несмотря, однако, на сделанные дополнения, задача о движении регулятора представит весьма значительные трудности, если ее рассматривать в самом общем виде, но в этом общем виде решение ее не нужно для практического приложения. Имея в виду эту главную цель, можно прямо заметить, что регулятор только тогда хорошо действует, когда угловая скорость рассматриваемой машины изменяется мало, а следовательно, и самые размахи регулятора, сохраняя незначительную величину, происходят при этом совершенно плавным образом; поэтому в исследовании движения регулятора покойно действующего можно допустить, что:

а) разность между действительной и нормальной угловыми скоростями машины будет мала сравнительно с величиной нормальной скорости;

б) перемещения муфты будут малы;

в) скорости этих перемещений будут также незначительными величинами.

Пользуясь этими ограничениями, ни в чем, впрочем, не уменьшающими практического значения результатов, можно, при исследовании регуляторов, развертывать в строки различ-

ные функции указанных малых величин и довольствоваться только членами, пропорциональными первым их степеням, отбрасывая члены второго и высших порядков.

Через приложение этого метода к исследованию движения регуляторов получается для его определения дифференциальное линейное уравнение 3-го порядка с постоянными коэффициентами, зависящими от устройства регулятора.

Интегрирование этого уравнения и разбор коэффициентов, входящих в него, приводит к весьма наглядному представлению о движении регуляторов, из которого, между прочим, вытекают следующие результаты, имеющие существенное значение как для теории регуляторов, так и для практического их употребления.

1. Все вообще регуляторы с течением времени увеличивают размахи колебаний, которые они получают при нарушении равновесия между силой и сопротивлением машины; применение катаракта вообще представляет весьма действительное средство к ограничению этих размахов, которое притом не оказывает вредного влияния ни на чувствительность регулятора, ни на степень равномерности движения машины, так что *катаракт есть существенная принадлежность чувствительного и правильно действующего регулятора прямого действия.*

2. Если под именем *астатического* регулятора разумеется такой, для которого разность между равновесными скоростями, соответствующими различным положениям регулятора, будучи развернута в строку по степеням расстояния этих положений, не заключает первой степени расстояния, то размахи такого регулятора не могут быть ограничены посредством катаракта, сколь бы он силен ни был, и поэтому *астатические регуляторы даже и с катарактом не должны быть употребляемы.*

3. Степень равномерности движения, доставляемого регулятором, существенно зависит от изменений, могущих иметь место в сопротивлении, преодолеваемом машиною. Изложенная теория дает эту зависимость, которая должна быть при

нимаема в соображение при устройстве регулятора; иначе он может вовсе не достигать своей цели.

4. На действие регулятора оказывают существенное влияние количества, наименованные в изложенной теории *подвижностью, силой* и *устойчивостью регулятора.* Количества эти определяются устройством регулятора, регулирующего прибора и передачи между ними: с помощью этих количеств легко находится как действие уже построенного регулятора, так и устройство регулятора проектируемого, долженствующего удовлетворять наперед заданным условиям.

В заключение изложены были приложения этой теории к регуляторам Портера и так называемому косинус-регулятору.

ВЫСТУПЛЕНИЕ А. В. ГАДОЛИНА

По окончании доклада г. председатель заявил, что, вероятно, многим из слушателей вначале казалось, что для решения поставлен такой вопрос, который решить нельзя. В таком виде представилось это дело сначала и мне, когда я в первый раз ознакомился с работой Ивана Алексеевича; вопрос казался мне настолько неопределенным, что я не мог видеть возможности облечь в математическую форму заданные условия.

Однако это оказалось возможным, и мы видели, что решение получилось совершенно определенное.

Конечно, Иван Алексеевич не имел в виду всевозможные регуляторы, которые могут существовать. Регуляторы, им рассматриваемые, известного свойства, но именно такого, что они подходят к случаям, чаще всего встречающимся на деле, и мне кажется, что предложенный для решения вопрос при настоящем положении дела представляется чрезвычайно важным. Чем общее поставлен вопрос, тем, вообще говоря, лучше, потому что решение применимо к большей части случаев, и оно дает более обширные указания для тех, кто занимается этим делом.

Замечательно, что молодые изобретатели на поприще механической техники весьма часто начинают ряд своих изобретений с регуляторов, которые здесь играют роль такую же, как прицелы и гранатные трубки в артиллерийской технике. Изобретений по части регуляторов существует такое множество и такое разнообразие в них, что, как думаю, мало даже и специалистов, кто бы знаком был со всеми этими устройствами.

Такое богатство изобретений указывает также и на то, что существующие приборы не удовлетворяют цели; только при этом условии может быть, что беспрестанно являются новые лица, ищущие чего-нибудь лучшего.

При всем этом изобретатели не могли иметь в виду некоторых общих принципов, которых следовало бы держаться, и через такое незнание потеряно было много времени и труда.

Мы видим и на самом деле, что большинство этих изобретений осталось без применения и что поэтому изобретатели даром потратили свои умственные силы, время и материальные средства, которые могли быть употреблены ими на лучшее дело.

В этом отношении теория Ивана Алексеевича чрезвычайно будет полезна, ибо он с самого начала и в самое короткое время, при небольших вычислениях, дает определенные понятия о том, в чем состоят главные свойства различных регуляторов.

Мы должны надеяться, что сегодня опять нам является новый случай выслушать теоретическое сообщение по одной из главных частей практической механики, и что можем иметь сознание, что идем вперед.

Присутствующие здесь молодые силы, ободренные этим, постараются, без сомнения, расширить свои познания и усилить свою деятельность на поле науки, от содействия которой, как я уже имел случай раньше высказаться, следует ожидать, что подвинется вперед механическая техника в нашем отечестве. Затем я предлагаю еще раз благодарить почтенного докладчика за интересное и полезное его сообщение (рукоплескания).



ИВАН АЛЕКСЕЕВИЧ ВЫШНЕГРАДСКИЙ КАК ПРОФЕССОР И УЧЕНЫЙ

ЧИТАНО
В. Л. Кирпичевым в заседании харьковского отделения императорского русского технического общества
27 мая 1895 г.

„Sit tibi terra levis“

Внезапная кончина Ивана Алексеевича застала врасплох всех его почитателей и учеников, ожидавших, что он к прежним своим научным работам прибавит еще много новых не менее замечательных. Эти ожидания поддерживались слухами которые в последнее время даже указывали область науки, разрабатываемую Иваном Алексеевичем,— теорию электричества; но все такие надежды на будущее были разрушены неумолимою рукою смерти, и нам остается только вспоминать о прошедшей деятельности покойного.

Полная биография Ивана Алексеевича, вероятно, появится не скоро, так как составление ее потребует весьма значительного труда. Он работал в стольких разнообразных сферах, что одному биографу крайне трудно охватить и оценить всю его деятельность; вероятно понадобятся соединенные усилия многих лиц.

Профессор, ученый, организатор всех стадий технического образования, начиная с высших институтов и кончая низшими — ремесленными училищами и обучением ручному труду в народных училищах, один из основателей Императорского Русского Технического Общества, практический инженер, исполнивший много замечательных работ по машиностроению и устройству заводов, администратор, руководивший несколькими обширными и процветавшими промышленными предприятиями,

и, под конец своей жизни, государственный деятель, занимавший самые высокие посты, работавший в самой трудной сфере государственной деятельности — вот краткое и неполное перечисление различных областей деятельности Ивана Алексеевича. Везде остались следы его работ, и, без сомнения, сотрудники и ученики его соберут подробные данные о его деятельности, которая, по своему разнообразию в наш век узкой специализации, представляется почти сверхъестественною. Эти данные послужат материалами для будущей биографии, и мне кажется, что не следует откладывать их собирание, а необходимо немедленно же приступить к этому делу и по возможности скорее публиковать материалы. Неизбежная неполнота первоначальных материалов вызовет дополнения, поправки, и мало-помалу разъяснится вся деятельность покойного. С своей стороны я решаюсь теперь же представить вниманию всех учеников Ивана Алексеевича несколько беглых заметок о его деятельности как профессора и ученого, основанных на моих личных воспоминаниях.

В научной сфере, подобно другим областям духовной деятельности человека, существует преемственная передача духовных даров от учителя к ученику, нечто вроде посвящения на умственную деятельность. Это можно проследить исторически и указать для многих знаменитых в науке людей тех ученых, которые передали им священный огонь научного исследования и направили их деятельность на разработку той или другой науки. Такая разработка часто потом ведется вполне самостоятельно и оригинально, но первый импульс почти всегда вызывается личными сношениями с учеными, занимающимися тою наукою, которую выбирает себе начинающий деятель. Так, например, Платон получил такое посвящение от Сократа, Эйлер — от Ивана Бернулли*, Либих — от Гэй-Люссака. Для Ивана Алексеевича такими учителями, сообщившими начальный

* См. Eloge d'Euler par Condorcet.

импульс его замечательным талантам, послужили Остроградский и Редтенбахер.

Наш знаменитейший геометр образовал целую школу русских математиков. Я думаю, что влияние его продолжается до нашего времени, и даже решусь высказать мысль, что это влияние есть одна из причин современного блестящего положения математических наук в России. Как известно, Остроградский много занимался аналитической механикой, к области которой относятся наиболее замечательные его труды. Понятно, что уроки такого гениального учителя направили на механику деятельность и симпатии Ивана Алексеевича, слушавшего лекции Остроградского в Главном Педагогическом Институте, где воспитывался покойный, сохранявший всю свою жизнь самые лучшие воспоминания об этом заведении.

Заканчивая свое образование за границей, Иван Алексеевич слушал лекции знаменитого Редтенбахера, бывшего в то время профессором и директором Политехнической Школы в Карлсруэ. Редтенбахера должно считать творцом машиностроения — науки, до него вовсе не существовавшей. Конечно, научное изучение машин началось гораздо раньше его, и ко времени начала деятельности Редтенбахера уже существовала прикладная механика, созданная главным образом трудами Кориолиса и Понселе. Но хотя обе упомянутые науки занимаются одним и тем же предметом — машинами, тем не менее между ними есть существенная разница, происходящая от различия точек зрения. В прикладной механике машину рассматривают как нечто данное, существующее как готовый предмет, в ней изучают жизнь этого предмета и проявления этой жизни, т. е. силы и движения, развивающиеся в машине. Между тем в машиностроении мы рассматриваем машину как дело рук человеческих: она еще не существует, ее нужно построить, изготовить, а наука дает правила этого построения. Редтенбахеру принадлежит заслуга постановки машиностроения на строго научную почву.

Рассмотрение машин с первой точки зрения вполне достаточно, если мы пользуемся ввозимыми из-за границы машинами. Но если желаем насадить у нас производство машин, то необходимо обратиться ко второй точке зрения. Прикладная механика существовала в России до И. А. Вышнеградского, и из старинных сочинений можно указать на книгу Ястржембского, которая внесла к нам идеи Понселе. Но введение в России преподавания машиностроения, а следовательно, и подготовка к отечественному производству машин, есть дело И. А. Вышнеградского, и в этом состоит его главная заслуга и особое значение покойного.

Будучи в течение многих лет профессором в двух заведениях — С.-Петербургском Технологическом Институте и Михайловской Артиллерийской Академии, И. А. Вышнеградский образовал несколько поколений механиков и строителей машин; ученики его теперь рассеяны по всему лицу нашего обширного отечества и, пользуясь сообщенными им знаниями, успешно работают практически и теоретически на поприще машиностроения. Оно теперь стало у нас туземным делом, тогда как до возвращения И. А. Вышнеградского из-за границы этой специальности почти не было в России. Это один из лучших примеров того огромного значения, которое могут представить учитель и школа для действительной жизни. Для достижения таких результатов И. А. Вышнеградскому пришлось работать очень много и почти без отдыха в качестве профессора. Он читал самые разнообразные курсы по механике и машиностроению, и почти нет такой области обширной механической науки, которая не сделалась бы предметом его внимания. Один отдел за другим выбирался им как предмет преподавания, и каждый из курсов, которые он последовательно читал, представляет собой само стоятельное, законченное, вполне разработанное целое, новый вклад в науку. Не находя возможным перечислять все им сделанное, укажу только на главное.

На первом плане нужно поставить философское установле-

ние основных принципов общей механики, т. е. науки о движении вообще. Весьма замечательные взгляды на этот вопрос были изложены на публичных лекциях, читанных им в Пассаже, в конце пятидесятых годов, и изданных потом под заглавием „Публичные лекции о машинах“. Тому же вопросу посвящена книга его „Элементарная механика“, которая до сих пор остается лучшим элементарным руководством по этому предмету. Очень жаль, что обе эти книги исчезли из обращения, и достать их очень трудно. Весьма желательно было бы, чтобы они были изданы вновь; они нисколько не потеряли своего значения, несмотря на обилие появившихся после того сочинений, посвященных исследованию основных принципов механики и принадлежавших различным авторам, из которых упомянем Дюринга, Маха, Максвелла, Штрейнца и др.

В „Элементарной механике“, которая была результатом преподавания в среднем учебном заведении, законы движения выведены без помощи высшего анализа, самыми простыми математическими приемами. Но И. А. Вышнеградский читал также в течение нескольких лет в Артиллерийской Академии лекции по аналитической механике, которую он излагал в духе классических французских руководств Делоне, Фресине и Штурма.

Далее идет учение о сопротивлении материалов и теория упругости, которые преподавались И. А. Вышнеградским тоже в Артиллерийской Академии. Кажется, ему первому пришлось излагать в России замечательную, сделанную Клебшем постановку задачи Сан-Венана, т. е. той задачи теории упругости, которая включает в себе, как частные случаи, почти все вопросы сопротивления материалов.

В течение многих лет Иван Алексеевич читал в С.-Петербургском Технологическом Институте механическую теорию теплоты, в которой он является распространителем идей Клаузиуса. Значительная часть этого курса посвящалась приложению теории к паровым и другим термическим двигателям. Из вопросов, подвергшихся в его руках новой самостоятельной разработке,

здесь необходимо указать на составленную им общую теорию регенеративных процессов. Этот вопрос, в то время, когда начиналось чтение означенного курса, находился в весьма неопределенном положении. Хотя Рэнкин уже установил правильный взгляд на явления регенерации, или возрождения тепла, но идеи его были почти совершенно неизвестны на континенте Европы, и даже Цейнер, в первых изданиях своей механической теории тепла, высказывал ошибочные и сбивчивые понятия. В своем курсе, многократно литографированном, И. А. Вышнеградский дал вполне верное и общее решение этого вопроса, которое много способствовало бы увеличению славы его, если бы оно было своевременно напечатано *.

Этот читанный Иваном Алексеевичем курс механической теории теплоты всегда имел большой успех и привлекал значительное число слушателей. Сам Иван Алексеевич занимался им с особой любовью и продолжал читать его даже тогда, когда постепенно сокращал свои профессорские занятия, будучи сильно обременен другими многочисленными делами. Он прекратил чтение этого курса, только когда был призван к высшей государственной деятельности в качестве члена Государственного совета и министра финансов.

Из курсов, посвященных специально машиностроению, прежде всего нужно упомянуть о курсе подъемных машин, который читался одновременно в Технологическом Институте и Артиллерийской Академии. Эти лекции послужили основанием для печатного курса того же названия, который, сравнительно со всеми прочими сочинениями Ивана Алексеевича, приобрел наибольшую популярность. Значение этого курса гораздо больше, чем можно судить по его заглавию. Это сочи-

* Существуют в печати три популярные лекции его об основных законах механической теории теплоты, читанные в Русском Техническом Обществе. В Известиях Технологического Института напечатан мемуар покойного „О законе Максвелла“, относящемся к области кинетической теории газов.

нение не следует рассматривать как занимающееся решением лишь одного частного и довольно узкого вопроса о проектировании подъемных машин. Задача, поставленная автором, была гораздо шире; он имел в виду изложить общие правила машиностроения, и подъемные машины в его книге представляют лишь конкретный пример, на котором изъясняются общие правила. Таким образом сочинение его представляет собой „Введение к изучению машиностроения". Лицо, изучившее его и составившее проект подъемной машины, получает подготовку к машиностроению вообще. В этом состоит важное значение этого курса, который сделался основной дисциплиной академического образования инженеров, причем, приводя это слово, я, конечно, понимаю его в смысле дисциплины ума. Так поставил это дело Иван Алексеевич, придававший означенному курсу именно то значение, как изложено выше. В подтверждение своего взгляда он ссылался на своего учителя Редтенбахера и приводил следующие слова последнего: „Wer einer Krahn bauen kann, der kann bauen". И действительно, студенты, прослушавшие означенный курс и исполнившие под руководством Ивана Алексеевича проект подъемной машины, быстро осваивались с приемами машиностроения, и дальнейшие занятия по этому делу для них не представляли затруднений.

Весьма большое значение для образования инженеров имел тот курс, читанный в Технологическом Институте Иваном Алексеевичем, который был посвящен специальному изучению паровых машин, их конструкций и действия, правил расчета таких машин. Некоторые отделы были напечатаны, но издание разошлось очень быстро и исчезло почти немедленно после своего появления в свет. Вероятно, это сочинение еще можно будет теперь найти у некоторых бывших учеников покойного; кроме печатного издания, оно несколько раз было выпущено в литографированном виде. На лекциях, посвященных этому курсу, Иван Алексеевич, между прочим, почти немедленно за появлением знаменитых исследований Гирна

относительно явлений, происходящих в паровом цилиндре, начал излагать результаты этих исследований и методу Гирна, которого он ставил очень высоко как ученого и с которым был лично знаком и находился в переписке. Таким образом метода Гирна, представляющая эпоху в исследовании паровых машин, очень скоро сделалась достоянием русских инженеров.

К области паровых машин относятся два мемуара Ивана Алексеевича: „О регуляторах прямого действия“ и „О регуляторах непрямого действия“, напечатанные в Известиях Технологического Института за 1877 и 1878 гг. Еще раньше, именно в 1876 г., общий метод и главные результаты этих исследований были представлены в Парижскую Академию Наук и напечатаны в ее Comptes Rendus (№ 5, т. 83). Эти два мемуара можно назвать главной научной работой покойного, и они заслуживают внимания во многих отношениях. Они представляют собой образцы научного исследования технических вопросов. Задача охвачена весьма широко, так что в нее входят разнообразнейшие конструкции регуляторов, и, несмотря на отвлеченный характер исследования, получаются результаты, имеющие важное, чисто прикладное значение. Все изобретатели и конструкторы регуляторов должны ознакомиться с этими мемуарами и получить крайне существенные для себя указания. Это исследование Ивана Алексеевича может быть названо одним из самых ярких примеров того, какую силу представляет наука для развития техники.

Истинно научное исследование редко бывает изолированно: оно всегда связано с другими, и ученый, решая известный вопрос, часто задевает при этом много других задач, дает указания, намеки на их решения, вводит новую методу в науку. Это замечание имеет прямое отношение к исследованиям Ивана Алексеевича о регуляторах. Он сделал крупный шаг вперед, по сравнению с прежней постановкой вопроса, когда рассматривали только статическое равновесие регуляторов, между тем как Иван Алексеевич ставил вопрос на динамическую почву.

Этим он дал новую точку зрения и методу изучения не только вопроса о регуляторах, но и многих других вопросов касательно движения машин. Значение упомянутых его мемуаров лучше всего объясняется сравнением, для которого обратимся в область небесной механики. В ней движение планет рассматривалось сначала вполне изолированно, отдельно для каждой планеты, затем сделали шаг вперед, начали рассматривать взаимное действие небесных тел и происходящее вследствие этого возмущенное движение их. Мемуары Ивана Алексеевича также имеют своим предметом возмущенное движение машины, по лучающееся, когда правильное движение ее нарушено какой-либо пертурбацией. При таких пертурбациях в машинах весьма важно, чтобы возмущения, отступления от правильного движения, были невелики, другими словами, чтобы движение машины было устойчивое. Цель всяких регулирующих приборов заключается в сообщении движению машины свойства устойчивости.

Таким образом теория регуляторов, установленная Иваном Алексеевичем, находится в тесной связи с общей теорией устойчивости движения, которая теперь служит предметом многих исследований в области аналитической механики (работы Рауса, Пуанкаре, Н. Е. Жуковского, А. М. Ляпунова). Таково общее значение в прикладной механике замечательных мемуаров Ивана Алексеевича, и теперь уже имеется несколько дальнейших исследований движения машин, произведенных в духе его метoды. Его нужно считать инициатором введения понятия об устойчивости в исследование движения машин. Вследствие этого означенное исследование сделалось более точным, более близким к истине, чем первоначальное грубое приближение. По этому поводу нельзя не вспомнить еще об одном улучшении теории движения машин — введении в рассмотрение упругих свойств движущихся частей машин, которые прежде рассматривались как неизменяемые, вполне жесткие тела. Это улучшение теории сделал Кретц, и таким образом теория шаг

за шагом подвигается вперед и приближается к абсолютной истине.

Если бы Иван Алексеевич имел больше свободного времени, то он обогатил бы науку еще значительным числом работ не меньшего достоинства, чем вышеуказанные. Конечно, много было им задумано и отчасти уже разрешено, но не опубликовано. В подтверждение этого я могу привести следующий факт. Однажды Иван Алексеевич рассказывал мне содержание своего исследования о движении рудничных насосов, имеющих длинную штангу, которая с поверхности земли опускается на дно рудника. Математическая теория этого движения привела его мысли к интересному изобретению, а именно: он придумал особый противовес вроде маятника, с помощью которого регулировалось движение массивной штанги насоса. Несколько лет спустя после этого разговора, на одной из всемирных выставок, я встретил выставленное (как интересная новость) совершенно такое же изобретение — именно известное теперь приспособление Бокгольца,— и указал Ивану Алексеевичу, что вследствие долгого откладывания публикации упомянутого исследования, другое лицо предупредило его. Я уверен, что это не был единственный случай, а лишь один из многих.

Перечисляя разнообразные курсы, которые на своем трудовом веку читал покойный, нельзя не упомянуть об одном, очень интересном, именно о курсе проектирования машин-орудий для обработки металлов. Этот курс читался в Михайловской Артиллерийской Академии и сопровождался проектированием токарных станков разного рода. Курс заключал в себе весьма плодотворные идеи, применимые к проектированию рабочих станков вообще, и мог служить основанием для постановки на рациональную почву дела конструирования машин-орудий.

Кроме чтения теоретических лекций, Иван Алексеевич руководил проектированием слушателями различных машин: подъемных, паровых, рабочих станков и т. д.; здесь он яв-

лялся в высшей степени полезным для своих учеников, вырабатывая из них прекрасных конструкторов. Сам покойный обладал замечательным конструкторским талантом, т. е. способностью творчества в области машиностроения, талантом создавать новое как в общем устройстве машин, так и в деталях их. Это совершенно своеобразная способность, не имеющая ничего общего с научными талантами и заключающая в себе известную долю художественного вкуса. Составленные Иваном Алексеевичем многочисленные проекты машин ставят его наряду с самыми талантливыми конструкторами: Редтенбахером, Жираром, Рамсмботомом, Армстронгом, Ридлером и др. По чертежам покойного было исполнено много машин, преимущественно для Артиллерийского Ведомства, в котором он долгое время состоял главным механиком и для которого он устроил механическую часть многих технических заведений: орудийного, патронного, порохового заводов и др.

Деятельность Ивана Алексеевича в Артиллерийском Ведомстве относится к тому времени, когда входили в употребление орудия все большего и большего калибра и громадного веса. Необходимо было сделать для них разнообразные подъемные машины, мостовые и пловучие краны, медведки и трикебали для перевозки пушек и т. д. Условия, которые ставились конструктору, были весьма тяжелы: иногда требовалось, чтобы машины, поднимающие громадные грузы, сами были очень легки и переносны; часто следовало принимать в соображение, что с машиной будут обращаться грубые неумелые руки солдат, и все-таки машина должна была оставаться неуязвимой, несмотря на крайне неосторожное обращение с нею *.

Самой замечательной работой Ивана Алексеевича в области практического машиностроения была постройка Охтенского

* Для примера трудностей укажу, что в переносных подъемных машинах все зубчатые колеса приходилось делать бронзовыми, так как чугунные зубцы неминуемо бывали поломаны при разборке и перенесении машины солдатами.

порохового завода, для которого покойный устроил двигатель (три турбины Жонваля по 140 сил каждая) и проволочную передачу работы от двигателя к отдельным пороховым фабрикам, выстроенным на протяжении нескольких верст, в расстоянии 25 сажен одна от другой, и многие исполнительные механизмы. Во время исполнения всей работы (в половине шестидесятых годов) передача проволочными канатами представляла новость. В Западной Европе было еще очень мало примеров такой передачи, и грандиозное Охтенское устройство обратило на себя общее внимание, так что часто после того на Охтенский завод указывали при перечислении наиболее замечательных проволочных передач *. Из числа исполнительных механизмов этого завода очень замечателен придуманный Иваном Алексеевичем пресс для приготовления призматического пороха — весьма остроумная автоматическая машина, которая была потом применена и на германских пороховых заводах.

Естественно, что уроки такого талантливого и опытного конструктора, который с особой охотой делился всеми своими знаниями со студентами, проектировавшими под его руководством, ценились очень высоко. Каждое замечание Ивана Алексеевича по поводу исполненного проекта ярко освещало предмет, научало многому и запоминалось его слушателями навсегда.

Экспериментальная механика также не ускользнула от внимания Ивана Алексеевича. Ему пришлось заняться этим делом впервые в шестидесятых годах, когда до нас дошли сведения о замечательных опытах над металлом для пушек, произведенных в Америке Родманом, Уэдом и др. Наша артиллерия нашла

---

* См., например, J a c q m i n. Les machines à vapeur. Эта чисто практическая работа устройства проволочной передачи на Охте вызвала один очень интересный научный труд Ивана Алексеевича. посвященный вопросу о провесе проволочного каната. Содержание его известно мне из лекций, которые я слушал у покойного, и приходится опять высказать сожаление о том, что это исследование не было напечатано.

необходимым также изучать свойства металла в орудиях, и тогда Иван Алексеевич спроектировал рычажный пресс для испытания металлов, который был поставлен в Технической Артиллерийской Школе и многие годы употреблялся с указанной целью. Затем Иван Алексеевич устроил в Технологическом Институте первую в России механическую лабораторию для производства механических опытов разного рода. В ней был поставлен существующий до сих пор пресс силой в 50 тонн для испытания металлов и других строительных материалов. Здесь Иван Алексеевич довольно долго занимался исследованием изменения температуры при растяжении металлов, но, к сожалению, эти опыты не были закончены и полученные интересные результаты не были обнародованы.

Кроме того, покойный много занимался приемами опытного исследования паровых машин, применяя для этого известные методы Гирна и Донкина. С этой целью при паровой машине Института была устроена вся совокупность приборов, необходимых для ведения исследования приемом Донкина. Теоретическая работа Ивана Алексеевича относительно регуляторов вызвала необходимость разъяснить действие катаракта и величину сопротивления, им представляемого. Поэтому Иван Алексеевич занялся экспериментальным исследованием вопроса о сопротивлении, встречаемом жидкостями при прохождении их через отверстия, при помощи особого им придуманного прибора. Но полученные им результаты не были опубликованы.

Многочисленные бывшие слушатели Ивана Алексеевича сохраняют восторженные воспоминания о его лекторском таланте. Он имел редкий дар приковывать внимание слушателей к объясняемому предмету, заинтересовывать их, и все им рассказанное запечатлевалось в памяти надолго, если не навсегда. Мне, например, вполне ясно припоминаются некоторые его лекции, которые я слышал более 30 лет тому назад. В то же время он умел просто и ясно излагать самые трудные теории

или, лучше сказать, при его исследовании в науке вовсе не оказывалось ни темных, ни трудных мест. В этом отношении он являлся вполне достойным своих знаменитых учителей Остроградского и Редтенбахера, которые оба славились своими лекторскими талантами. Еще живы некоторые из учеников Остроградского, и, по отзывам их, наш геометр не имел никого ему равного по таланту изложения. Этот талант ярко блещет в его „Лекциях по алгебраическому анализу"; хотя сборник этот написан не самим Остроградским, а слушателями его лекций, тем не менее это удивительная по ясности и интересная книга. Что касается до Редтенбахера, то о его замечательном таланте изложения мы знаем со слов самого Ивана Алексеевича. Я припоминаю, между прочим, рассказ его о том, как однажды Редтенбахер пришел на лекцию с подвязанной рукой, так что не мог чертить. Без всякого пособия чертежа, не сделавши ни одного жеста, он объяснил устройство водостолбовой машины настолько ясно, что все слушатели поняли конструкцию ее во всех подробностях. И многочисленные печатные труды Редтенбахера все до одного отличаются замечательно ясным изложением.

Ученики Ивана Алексеевича и по окончании курса учебного заведения могли продолжать пользоваться его советами по всевозможным научным и техническим вопросам. Он с особой охотой щедро делился с ними своею опытностью и знаниями, облегчая первые, самые трудные шаги начинающих, постоянно имея в виду развитие любимой им науки. Чтобы дать возможность лицам, занимающимся прикладной механикой, обмениваться между собой мыслями, он устроил небольшой кружок специалистов, периодически собиравшихся для обсуждения прочитанного, сообщения научных новостей и работ членов кружка. Сам он был центром и душой этого кружка, названного по числу членов его „Пентагональным обществом". Разные обстоятельства помешали этому учреждению расшириться и сделаться началом большого ученого общества, но и за короткое время своего существования этот кружок принес большую пользу

своим членам, с благодарностью до сих пор вспоминающим о нем *.

В то время в России вовсе не было такого печатного органа, в котором могли бы помещаться научные исследования, касающиеся технических вопросов. Иван Алексеевич исправил этот недостаток, учредивши „Известия С.-Петербургского Технологического Института" — издание, которое процветает и по настоящее время. Он принимал очень деятельное участие в устройстве Императорского Русского Технического Общества. В первые годы существования этого Общества он был председателем отдела, посвященного механике, и в это время молодое Общество проявляло живую, крайне интересную деятельность, в чем оно много обязано Ивану Алексеевичу. Ему же обязаны своей организацией и современным положением оба наших Технологических Института — в С.-Петербурге и Харькове. Вообще можно сказать, что все современные хорошие стороны положения у нас прикладной механики как науки и предмета преподавания так или иначе ведут свое начало от деятельности Ивана Алексеевича **.

---

* См. в журн. „Инженер" (№ 5, 1895) некролог И. А. Вышнеградского, написанный А. П. Бородиным — одним из членов этого кружка.

** Он был главным деятелем по выработке общего нормального плана промышленного образования в России, который составлял предмет забот Министерства народного просвещения в 80-х годах. По мысли его это образование должно было быть распространено на все степени промышленной деятельности. Поэтому приходилось заботиться о школах высших — подготовляющих инженеров, средних — подготовляющих техников, или ближайших помощников инженеров, об училищах для подготовления мастеров и о школах для фабричных и заводских рабочих. Но Иван Алексеевич не ограничился такой постановкой вопроса о техническом образовании нашего народа, а заботился о еще большем его распространении. Ознакомившись в Швеции с полученными там успешными результатами обучения ручному труду в народных школах, он с обычной своей проницательностью сейчас же увидел громадное значение этого обучения, пр котором школа развивает не только чисто духовные способности ученико но также и физическую ловкость их органов, придает рукам ловкость,

Заканчивая этот беглый очерк, я должен просить извинения у всех почитателей покойного, которые, конечно, найдут у меня много пропусков и большую неполноту в оценке деятельности нашего общего учителя. Вероятно, еще многие питомцы его школы поднимут свои голоса, вспомнят его добрым словом и этим исправят недостатки моего очерка, которому я придаю значение небольшого венка, возлагаемого на свежую могилу, в ожидании постановки достойного ему памятника.

глазу верность, и таким образом дает надлежащее полное образование людям, которые в жизни своей должны заниматься ручным трудом. Иван Алексеевич вывез из Швеции подробности такого обучения ручному труду (так назывемому slöjd), привез образцы работ и много способствовал введению у нас такого обучения.



ДЖЕМС КЛЕРК МАКСВЕЛЛ

(1831—1879)

(КРАТКИЙ БИОГРАФИЧЕСКИЙ ОЧЕРК)

Джемс Клерк Максвелл родился 13 июня 1831 г. в имении своего отца Гленлер, вблизи Эдинбурга.

С 1841 по 1847 г. Максвелл учился в средней школе в Эдинбурге. Здесь, в возрасте 15 лет, он выполнил свою первую научную работу „О черчении овалов и об овалах со многими фокусами“.

С 1847 по 1850 г. Максвелл был студентом Эдинбургского университета, одновременно занимаясь некоторыми самостоятельными научными исследованиями в области геометрии и механики.

В конце 1850 г. Максвелл переезжает в Кэмбридж, в Тринити-колледж, где в продолжение четырех лет интенсивно изучает математику, механику и физику, главным образом по первоисточникам, уделив особое внимание Фарадею, Амперу, Лагранжу и Гамильтону. Общение с В. Томсоном, Д. Стоксом и другими выдающимися профессорами Кэмбриджского университета оставило существенный след на научном развитии Максвелла.

К выпускным экзаменам в Кэмбридже его готовит знаменитый „тутор“ (репетитор) Гопкинс. Позже Гопкинс, через занятия с которым прошло большое число замечательных ученых (в частности, В. Томсон), утверждал, что Максвелл, безусловно, был самым необыкновенным из его учеников.

По словам Гопкинса, Максвелл органически не мог неправильно думать в вопросах физики и обладал совершенно исключительной способностью к наглядному геометрическому мышлению. Что же касается аналитических способностей Максвелла, то хотя они, по словам Гопкинса, и были выдающимися, все же в этом отношении он уступал некоторым из других его учеников.

В 1854 г. Максвелл кончает Кэмбриджский университет и получает звание баккалавра с почетным отличием второй степени. Почетное отличие первой степени получает Раут, о котором здесь еще будет речь. Однако премия Смита по математике за 1854 г. делится между Максвеллом и Раутом. В этом же, 1854 г. Максвелл избирается членом своего колледжа и таким образом оставляется при Кэмбриджском университете для исследовательской и педагогической работы.

В Кэмбридже, еще будучи студентом, Максвелл начал свои исследования по теории электричества, которые впоследствии прославили его имя. Примерно к этому же времени относится начало его исследований по восприятию цветов, в которых он впервые обнаружил выдающиеся дарования экспериментатора.

В 1856 г. Максвелл переезжает в Абердин (Шотландия) где преподает физику в Маришаль-колледже Абердинского университета вплоть до 1860 г.

Основной научной работой Максвелла в течение первых двух лет пребывания в Абердине была работа об устойчивости кольца Сатурна. Эта тема о движении кольца Сатурна была выдвинута в 1856 г. (при участии В. Томсона) Кэмбриджским университетом на соискание премии Адамса*.

---

* Премия имени Адамса была установлена Сен-Джон-колледжем Кэмбриджского университета в 1848 г. в честь открытия Адамсом „на кончике пера“ планеты Нептун. Эта премия присуждается один раз в два года за работы на заранее выдвигаемую университетом тему из области математики, механики, астрономии и физики. В конкурсе на соискание премии Адамса могут принимать участие лишь лица, когда-либо окончившие Кэмбриджский университет.



Джемс Клерк Максвелл

(1831—1879).

В этой замечательной работе, получившей премию Адамса 1857 г. и напечатанной в 1859 г., впервые была систематически применена теория малых колебаний к исследованию устойчивости движения ряда моделей кольца Сатурна. Максвеллом, в частности, было показано, что если бы кольцо Сатурна было сплошным (твердым или жидким), то движение кольца было бы неустойчивым. Максвелл пришел к заключению, что кольцо Сатурна состоит из отдельных небольших телец, т. е. имеет метеоритное строение. После этой работы стало ясно, что Максвелл является звездой первой величины в математической физике и механике.

Примерно в это же время Максвелл занимается вопросами динамики твердого тела, отдавая явное предпочтение наглядному геометрическому подходу к этой проблеме, связанному с именем Пуансо, и, в частности, изобретает свою знаменитую модель волчка, которую до сих пор можно найти в каждом университете.

В 1860 г. Максвелл переезжает в Лондон, где в течение пяти лет руководит кафедрой физики в Кинг-колледже Лондонского университета. Несмотря на большую лекционную нагрузку, именно в эти годы Максвелл публикует свои исследования по кинетической теории газов, где он впервые вводит в физику статистические методы и, в частности, устанавливает знаменитый закон распределения скоростей газовых молекул, названный его именем. Одновременно Максвелл занимается теорией упругости, а также продолжает свои исследования в области теории электричества, которые выдвинули его как одного из величайших физиков XIX столетия. Именно Максвеллу удалось придать взглядам Фарадея, связанным с идеей близкодействия и с идеей о влиянии среды на взаимодействие зарядов и токов, точную математическую формулировку и распространить эти идеи на случай быстро-переменного поля. Ему принадлежит, в частности, новое понятие о токе смещения, которое сыграло роль фундамента в построении современной теории

электромагнитного поля. Законы электромагнитной теории поля, данные Максвеллом в виде системы дифференциальных уравнений в частных производных (эти уравнения впоследствии получили название „уравнений Максвелла“), не только охватили все известные тогда электрические и магнитные явления, но и позволили Максвеллу теоретически предсказать необходимость существования поперечных электромагнитных волн, скорость распространения которых должна равняться скорости света и которые в согласии с теорией должны обладать способностью отражаться и преломляться, как обычные световые волны. Отсюда Максвелл сделал вывод, что свет — это весьма короткие электромагнитные волны, и таким образом положил начало электромагнитной теории света.

Первый набросок электромагнитной теории света Максвелл дал в письме, написанном им Фарадею в 1861 г. Сравнительно подробное изложение своих идей Максвелл дает позднее — в работе „Динамическая теория электромагнитного поля“, написанной в 1864 г. и опубликованной в 1865 г.

В Кинг-колледже Максвелл, в сотрудничестве с Флемингом Дженкином (известным впоследствии инженером, о котором у нас еще будет речь), провел ряд экспериментальных исследований, относящихся к области электрических измерений. В частности, Максвеллом и Дженкином были изготовлены эталоны некоторых электрических единиц, например эталон ома.

В 1865 г. Максвелл оставляет Кинг-колледж и поселяется в своем имении Гленлер. Здесь он в течение шести лет работает в качестве частного ученого, поддерживая связь с Кэмбриджем и иногда выступая в качестве экзаминатора. За этот период он подготавливает к печати главный труд своей жизни „Трактат об электричестве и магнетизме“, изданный в 1873 г. в Лондоне в двух томах.

В момент своего появления „Динамическая теория электромагнитного поля“ и „Трактат“ хотя и вызвали значительный интерес, но все же не были оценены надлежащим образом.

Лишь позднее, в 1887 г., уже после смерти Максвелла, немецкому физику Генриху Герцу удалось экспериментально получить сравнительно короткие электромагнитные волны и обнаружить на опыте, что эти волны обладают всеми свойствами волн световых. После опытов Герца максвелловская теория электромагнитного поля получила всеобщее признание, и многие выдающиеся ученые стали ставить „Трактат“ Максвелла в один ряд с „Началами“ Ньютона.

В этот же, гленлеровский, период Максвелл опубликовал две работы, непосредственно относящиеся к техническим вопросам. Первая из этих работ „О теории поддержания электрических токов механическим путем без применения постоянных магнитов“ (1867 г.), возникновение которой связано с появлением динамо-машин, обладающих самовозбуждением, содержит первую по времени и интересную с физической точки зрения теорию динамо-машины. Однако реальные динамо-машины весьма сильно отличались от той идеальной модели, которую изучал Максвелл, и эта работа не получила известности в инженерных кругах.

Возникновение второй из этих работ — работы „О регуляторах“ (1868 г.) связано с изобретением инженером Флемингом Дженкином (коллега Максвелла по Кинг-колледжу, впоследствии профессор в Эдинбурге) регулятора новой конструкции, назначение которого — поддерживать постоянство числа оборотов машины при изменениях нагрузки и который применялся для некоторых лабораторных приборов и в некоторых опытных установках паровых машин. Так как наладка этого регулятора иногда вызывала затруднения, то Максвелл заинтересовался условиями устойчивой работы как данного регулятора, так и других аналогичных „астатических“ регуляторов и обратил внимание на то, что проблема устойчивости равномерного вращения машины, снабженной регулирующим устройством, может решаться теми же методами теории малых колебаний, которые он использовал в работе об устой-

чивости кольца Сатурна. Результаты, полученные Максвеллом в области теории регуляторов, представляют значительный интерес с точки зрения теоретической механики. Однако тот класс регуляторов, которым занимался Максвелл, не нашел себе применения в промышленной практике, и работа Максвелла не обратила на себя внимания инженеров. Но эта работа оставила все же существенный след в развитии теории устойчивости движения, а в конечном счете — и в теории регулирования. Именно в связи с этой работой Максвелл поставил 23 января 1868 г. в Лондонском Математическом обществе задачу об условиях, которым должны удовлэтворять коэффициенты алгебраического уравнения n-й степени, чтобы все корни его имели отрицательные действительные части. Однако ни в 1868 г., ни в ближайшие годы не было дано решения этой важнейшей для теории устойчивости движения и для теории регулирования задачи. В 1875 г. Максвелл предложил проблему усовершенствования теории устойчивости движения на премию Адамса 1877 г. Эту премию получил Раут, решивший, в частности, задачу, поставленную Максвеллом в 1868 г.

В 1870 г. Кэмбриджский университет получил большие средства на организацию новой лаборатории и кафедры экспериментальной физики от одного из потомков знаменитого английского физика XVIII века, Генри Кавендиша. Для этой цели Кэмбриджским университетом был приглашен Максвелл, который и возглавил большую работу по строительству здания лаборатории, ее оснащению и по организации ее работы.

В 1874 г. состоялось открытие лаборатории имени Кавендиша. После Максвелла ею руководили Джон Стретт (Рэли), Джон Джозеф Томсон, Эрнест Резерфорд.

Начиная с 1874 г., Максвелл посвятил много времени и труда обработке и изданию научных работ Генри Кавендиша, посвященных исследованию электрических явлений. При этом — что характерно для научной добросовестности Максвелла — ему пришлось поставить длинный ряд экспериментов для по-

вторения и проверки опытов Кавендиша, а также затратить много времени для расшифровки неясных мест его рукописей.

Организационная работа, подготовка к изданию рукописей Кавендиша и несколько ухудшившееся здоровье не помешали Максвеллу продолжать творческую деятельность. Он продолжал работать в области электричества, в области геометрической оптики и в области кинетической теории газов, где ему удалось в 1878 г. дать новое, опирающееся лишь на общие положения классической физики, доказательство знаменитой теоремы о равномерном распределении энергии по степеням свободы.

В одной из последних его работ была указана идея эксперимента для обнаружения движения в эфире солнечной системы. Эта идея была, как известно, позднее осуществлена Майкельсоном, и отрицательный результат этого опыта лег в основу теории относительности.

Много сил Максвелл отдал научно-популярной деятельности. Хотя он прочел много лекций и докладов, рассчитанных на широкую аудиторию, все же основным инструментом научной пропаганды для Максвелла были его популярные книги и его статьи для Британской энциклопедии. Популярные книги Максвелла: „Теория теплоты“ (1870), „Материя и движение“ (1873), „Электричество в элементарном изложении“ (1879), имели очень большой успех, неоднократно переиздавались и были переведены на русский, французский, немецкий и другие языки. Статьи Максвелла для Британской энциклопедии („Атом“, „Строение тел“, „Эфир“ и др.) являются образцовыми по ясности изложения трудных научных вопросов на языке, доступном широкой публике. Хотя содержание этих статей устарело, они и сейчас сохранили определенный научный интерес.

Начиная с 1877 г., здоровье Максвелла резко ухудшается. 5 ноября 1879 г. он скончался в Кэмбридже на 49-м году жизни.



СПИСОК

РАБОТ Д. К. МАКСВЕЛЛА*

1. On the theory of rolling curves. Transactions of the Royal Society of Edinburgh, 1849, XVI, c. 519—540.

2. On the description of oval curves, and those having a plurality of foci [1846]. [Proceedings of the Royal Society of Edinburgh 1851, II, c. 89—91.

3. On the equilibrium of elastic solids [1850]. Transactions of the Royal Society of Edinburgh 1853, XX, c. 87—120.

4. On a particular case of the descent of a heavy body in a resisting medium. Cambridge and Dublin Mathematical Journal, 1854, IX, c. 145—148.

5. On the transformation of surfaces by bending [1854]. Transactions of the Cambridge Philosoph. Society 1856, IX, c. 445—470.

6. On a method of drawing the theoretical forms of Faraday's lines of force without calculation. Brit. Assoc. Rep. (Reports of the British Association for the Advancement of Science) 1856, part 2, c. 12.

7. On the unequal sensibility of the Foramen Centrale to light of different colours. British Assoc. Rep. 1856, part 2, c. 12.

---

* В квадратных скобках указан год, в котором фактически выполнена данная работа.

8. On the theory of compound colours with reference to mixtures of blue and yellow light. Brit. Assoc. Rep. 1856, part 2, с. 12—13.

9. On an instrument to illustrate Poinsot's theory of rotation. Brit. Assoc. Rep. 1856 (part 2), с. 27—28.

10. On the theory of colours in relation to colour blindness Transactions of the Royal Scottish Society of Arts, Edinburgh 1856, IV, с. 394—400.

11. Description of a new form of the Platometer, an instrument for measuring the areas of plane figures drawn on paper.; Transactions of the Royal Scottish Society of Arts, Edinburgh 1856, с. 420—428.

12. Experiments on colour, as percieved by the eye, with remarks on Colour blindness [1855]. Transactions of the Royal Society of Edinburgh, 1857, XXI, с. 275—298.

13. On a dynamical top, for exhibiting the phenomena of the motion of a system of invariable form about a fixed point, with some suggestions as to the Earth's motion. Trans. of the Royal Soc. of Edinburgh 1857, XXI, с. 559—570.

14. On the perception of colour. Phil. Mag. (The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science) 1857, XIV, с. 40—47.

15. On the general laws of optical instruments. Quarterly Journal of pure and applied Mathematics 1858, II, с. 233—246.

16. On the stability of the motion of Saturn's Rings. Astronom. Society Monthly Notices 1859, XIX, с. 297—304. Отдельной книжкой Cambridge 1859.

17. On the dynamical theory of gases. Brit. Assoc. Rep. 1859 (part 2), с. 9.

18. On the theory of compound colours, and the relations of the colours of the spectrum. Royal Soc. Proc. (Proceedings of the Royal Society of London) 1859—60, с. 404—409. Philosophical Transactions, 1860, X, с. 57—84.

19. Postscript to a paper „On compound colours, and the relations of the colours of the spectrum". Royal Soc. Proc. 1859—60, X, c. 484—486.

20. Illustrations of the dynamical theory of gases. Part 1. On the motions and collisions of perfectly elastic spheres. Phil. Mag. 1860, XIX, c. 19—32.

21. Illustrations of the dynamical theory of gases. Part 2. On the process of diffusion of two or more kinds of moving particles among one other. Phil. Mag. 1860, XX, c. 21—37.

22. On physical lines of force. Part 1. The theory of molecular vortices applied to magnetic phenomena. Phil. Mag. 1861, XXI, c. 161—175.

23. On physical lines of force. Part 2. The theory of molecular vortices applied to electric currents. Phil. Mag. 1861, XXI, c. 281—291, 338—348.

24. On theories of the constitution of Saturn's Rings. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh 1862, IV, c. 99—101.

25. On physical lines of force. Part 3. The theory of molecular vortices applied to statical electricity. Phil. Mag. 1862, XXIII, c. 12—24.

26. On physical lines of force. Part 4. The theory of molecular vortices applied to the action of magnetism on polarized light. Phil. Mag. 1862, XXIII, c. 85—95.

27. On Faraday's lines of force [1855—56]. Transactions of the Cambridge Philosophical Society 1864, X, c. 27—83.

28. On reciprocal figures and diagrams of forces. Phil. Mag. 1864, XXVII, c. 250—261.

29. On the calculation of the equilibrium and stiffness of frames. Phil. Mag. 1864, XXVII, c. 294—299.

30. A dynamical theory of the electromagnetic field. Royal Soc. Proc. 1864, XIII, c. 531—536. Philos. Trans. 1865, CLV, c. 459—512. Phil. Mag. 1865, XXIX, c. 152—157.

31. Description of a further experimental measurement of electrical resistance made at King's College. Brit. Assoc. Rep.

1864, XXXIV, с. 350—351. Phil. Mag. 1865, XXIX, с. 436—460, 507—525 (в соавторстве с проф. Флемингом Дженкином).

32. On the elementary theory of optical instruments [1856]. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 1866, I, с. 173—175.

33. On the viscosity or internal friction of air and other gases. Phil. Trans. 1866, CLVI, с. 249—268. Royal Soc. Proc. 1867, XV, с. 14—17.

34. On the dynamical theory of gases [1866]. Phil. Trans. 1867, CLVII, с. 49—88. Royal Soc. Proc. 1867, XV, с. 146—149. Phil. Mag. 1866, XXXII, с. 390—393; 1868, XXXV, с. 129—145, 185—217.

35. On the equilibrium of a spherical envelope. Quarterly Journal of pure and applied Mathematics 1867, VII, с. 325—333.

36. On the theory of the maintenance of electric currents by mechanical work without the use of permanent magnets. Royal Soc. Proc. 1867, XV, с. 397—402. Phil. Mag. 1867, XXXIII, с. 474—478.

37. On Mr. Grovés „Experiment in magneto-electric induction". Phil. Mag. 1868, XXXV, с. 360—363.

38. On a method of a making a direct comparison of electrostatic with electromagnetic force; with a note on the electromagnetic theory of light. Phil. Trans. 1868, CLVIII, с. 643—658. Royal Soc. Proc. 1868, XVI, с. 449—450. Phil. Mag. 1868, XXXVI, с. 316—317.

39. On the cyclide. Quart. Journ. of pure and applied Mathematics 1868, с. 111—128.

40. On governors. Royal Soc. Proc. 1868, XVI, с. 270—283. Phil. Mag. 1868, XXXV, с. 385—398.

41. Experiments of the value of V, the ratio of the electromagnetic to the electrostatic unit of electricity. Brit. Assoc. Rep. 1869, XXXIX, с. 436—438.

42. On the best arrangement for producing a pure spectrum on a screen [1868]. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. 1869, VI, c. 238—242.

43. The construction of stereograms of surface [1868]. Proceedings of the London Math. Society 1869, II, c. 57—58.

44. On reciprocal diagrams in space, and their relation to Airy's function of stress [1868]. Proceedings of the London Math. Society 1869, II, c. 58—60.

45. Theory of Heat. London 1870.

46. Remarks on Mr. Hanlon's paper on the Vena Contracta [1869]. Proceedings of the London Math. Society 1869—71, III, c. 6—8.

47. Can the potential of a uniform circular disc at any point be expressed by means of elliptic integrals? Proceedings of the London Math. Soc. 1869—71, III, c. 8.

48. On the displacement in a case of fluid motion [1870]. Proceedings of the London Math. Soc. 1869—71, III, c. 82—87.

49. Remarks on the mathematical classification of physical quantities [1871]. Proceedings of the London Math. Soc. 1869—71, III, c. 224—232.

50. Address to the Mathematical and Physical Section of the British Association. Brit. Assoc. Rep. 1870, XL (sect.), c. 1—9.

51. On colour-vision at different points of the retina. Brit. Assoc. Rep. 1870, XL (sect.), c. 40—41.

52. On hills and dales. Phil. Mag. 1870, XL, c. 421—427.

53. Introductory Lecture on Experimental Physics. October 25 1871. Cambridge 1871.

54. On the condition that, in the transformation of any figure by curvilinear coordinates in three dimensions, every angle in the new figure shall be equal to the corresponding angle in the original figure [1872]. Proceedings of the London Math. Soc. 1871—1873, IV, c. 117—119.

55. On the theory of a system electrified conductors, and other physical theories involving homogeneous quadratic functions [1873]. Proceedings of the London Math. Soc. 1871—1873, IV, c. 334—336.

56. On the focal lines of a refracted pencil [1873]. Proceedings of the London Math. Soc. 1871 — 1873, IV, c. 337 — 341.

57. On reciprocal figures, frames, and diagrams of forces [1870]. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh 1872, VII, c. 53—56. Transactions of the Royal Society of Edinburgh 1872. XXVI, c. 1—40.

58. On a bow seen on the surface of ice [1870]. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh 1872, VII, c. 69.

59. Addition to a memoir by Francic Deas: „On spectra formed by the passage of polarised light through double refracting crystals“ Transactions of the Royal Society of Edinburgh 1872, XXVI, c. 185—188.

60. On the geometrical mean distance of two figures on a plane. Transactions of the Royal Society of Edinburgh 1872, XXVI, c. 729—733.

61. On colour vision [1871]. Royal Instit. Proc. (Notice of the Proceedings at the Meetings of the Members of the Royal Institution) 1872, VI, c. 260—271.

62. On the induction of electric currents in an infinite plane sheet of uniform conductivity. Royal Soc. Proc. 1872, XX, c. 160—168. Phil. Mag. 1872, XLIII, c. 529—538.

63. On the final state of a system of molecules in motion subject to forces of any kind. Brit. Assoc. Rep. 1873 (sect.), XLIII, c. 29—32. Nature 1873, VIII, c. 537—538.

64. On Loschmidt's experiments on diffusion in relation to the Kinetic theory of Gases. Nature 1873, VIII, c. 228—230. Les Mondes 1873, XXXII, c. 164—171.

65. A Treatise on Electricity and Magnetism [1872], 2 vol. London 1873.

66. Matter and Motion. London 1873.

67. A discourse on molecules. Phil. Mag. 1873, XLVI, c. 453—469. Nature 1873, VIII, c. 437—441. Les Mondes 1873, XXXIII, c. 311—316, 409—420.

68. On action at a distance. Royal Inst. Proc. 1873, VII, c. 44—54.

69. On double refraction in a viscous fluid in motion [1873]. Royal. Soc. Proc. 1873—1874, XXII, c. 46—47. Annalen der Physik und Chemie 1874, CLI, c. 151—154.

70. On the solution of electrical problems by the transformation of conjugate functions [1871]. Cambridge Phil. Soc. Proc. (Proceedings of the Cambridge Philosophical Society) 1876, II, c. 242—243.

71. On the proof of the equations of motion of a connected system [1873]. Cambridge Phil. Soc. Proc. 1876, II, c. 292—294.

72. On a problem in the calculus of variations in which the solution is discontinuous [1873]. Cambridge Phil. Soc. Proc. 1876, II, c. 294—295.

73. Note to Mr Röhrs' paper on «Spherical and cylindric motion in viscous fluid» [1874]. Proc. of the London Math. Soc. 1873—4, c. 138—139.

74. On the application of Kirchhoff's rules for electric circuits to the solution of a geometrical problem. Brit. Assoc. Rep. 1874 (sect.), c. 18—19.

75. On Hamilton's characteristic function for a narrow beam of light [1874]. Proc. of the London Math. Soc. 1874—75, 6, c. 182—190.

76. On the application of Hamilton's characteristic function to the theory of an optical instrument symmetrical about its axis [1875]. Proc. of the London Math. Soc. 1874—75, 6, c. 117—122.

77. On the dynamical evidence of the molecular constitution of bodies. The Quarterly Journal of the Chemical Society of London 1875, 13, c. 493—508. Nature, 1875, 11, c. 357—359, c. 374—377. Gazzetta Chimica Italiana, 1875, 5, c. 190—208.

78. Lightning conductors. Journal of the Society of Telegraph Engineers 1875, 4, с. 429—31.

79. On the relation of geometrical optics to other parts of Mathematics and Physics [1874]. Proc. of the Cambridge Phil. Soc. 1876, 2, с. 338—340.

80. Report of Committee for testing experimentally Ohm's law. Brit. Assoc. Rep. 1876, с. 36—63 (в соавторстве с J. D. Everett и A. Schuster).

81. On the centre of motion ot the eye [1875]. Proc. of the Cambridge Phil. Soc. 1876, 2, с. 363—366.

82. On Bow's method of drawing diagrams in graphical statics with illustrations from Peaugellier's linkage. Proc. of the Cambridge Phil. Soc. 1876, 2, с. 407—414.

83. On the equilibrium of heterogeneous substances. Proc. of the Cambridge Phil. Soc. 1876, 2, с. 427—30.

84. On the protection of buildings from lightning. Brit. Assoc. Rep. 1876 (sect.), с. 43—45. Symon's monthly Meteorological Magazine 1876, 11, с. 132.

85. Theory of electrical induction. Nature 1876, 14, с. 27—28.

86. Note on Mr George Forbes's paper: „On diamagnetic rotation" [1876]. Proc. of the Royal Soc. of Edinburgh 1878, 9, с. 91—92.

87. On the electrical capacity of a long narrow cylinder, and a disc of sensible thickness [1878]. Proc. of the London Math. Soc. 1877—78, 9, с. 94—101.

88. On stresses in rarefied gases arising from inequalities of temperature. Royal Soc. Proc. 1878, 27, с. 304—308. Phil. Trans. 1880, 170, с. 231—256.

89. The telephone — Rede Lecture, Cambridge, May 24, 1878. Nature 1878, 18, с. 159—163.

90. On Boltzmann's theorem on the average distribution of energy in a system of material points [1878]. Trans. of the Cambridge Phil. Soc. 1879, 12, с. 547—570. Annal. Phys. Chem. Beibl., 1881, 5, с. 403—417. Phil. Mag. 1882, 14, с. 299—312.

91. The Electrical Researches of the Honourable H. Cavendish, 1879.

92. On a paradox in the theory of attraction [1877]. Proc. of the Cambridge Phil. Soc. 1880, 3, c. 34—39.

93. On approximate multiple integration between limits by summation [1877]. Proc. of the Cambridge Phil. Soc. 1880, 3, c. 39—47.

94. On the unpublished electrical papers of the Hon. Henry Cavendish [1877]. Proc. of the Cambridge Phil. Soc. 1880, 3, c. 86—89.

95. On a possible mode of detecting a motion of the solar system through the luminiferous ether. Royal Soc. Proc. 1880, 30, c. 108—110.

96. Elementary Treatise on Electricity. London, 1881.

97. The Scientific Papers of James Clerk Maxwell. Vol. I, vol. II, edited by W. D. Niven. Cambridge University Press., 1890.



ИВАН АЛЕКСЕЕВИЧ ВЫШНЕГРАДСКИЙ

(1831—1895)

(КРАТКИЙ БИОГРАФИЧЕСКИЙ ОЧЕРК*)

Иван Алексеевич Вышнеградский родился 20 декабря 1831 г. в г. Вышнем Волочке Тверской губернии (теперь Калининская область) в семье священника. В 1843 г. он поступил в Тверскую духовную семинарию, а через три года переехал в Петербург и поступил на физико-математический факультет Главного Педагогического Института.

Главный Педагогический Институт в Петербурге занимает в истории русского просвещения особое место. В нем преподавали первоклассные ученые — М. В. Остроградский, Э. Х. Ленц, А. А. Воскресенский, А. Н. Савич и др. Из его стен вышли Н. А. Добролюбов и Д. И. Менделеев. В 1851 г. И. А. Вышнеградский окончил физико-математический факультет Главного Педагогического Института с серебряной медалью и со званием старшего учителя.

Выдающиеся способности И. А. Вышнеградского обратили на себя внимание М. В. Остроградского. По его рекомендации И. А. Вышнеградский после окончания института был назначен преподавателем математики во 2-й Петербургский кадетский

* Некоторые дополнительные биографические сведения о И. А. Вышнеградском содержатся в речи В. Л. Кирпичева „И. А. Вышнеградский как профессор и ученый“ (см. стр. 304).

корпус и получил таким образом возможность, не порывая с Петербургом, продолжать свое образование.

С 1851 по 1854 г. И. А. Вышнеградский делил свое время между преподаванием математики в кадетском корпусе и систематическим изучением, главным образом по первоисточникам, математики и аналитической механики под руководством М. В. Остроградского. Он успешно сдал магистерские экзамены и в 1854 г. защитил в Петербургском Университете диссертацию на степень магистра математических наук: „О движении системы материальных точек, определяемой полными дифференциальными уравнениями“. Официальными оппонентами при защите этой диссертации были П. Л. Чебышев и О. И. Сомов.

Занятия по математике и аналитической механике, личное общение с М. В. Остроградским развили математические способности И. А. Вышнеградского. На многих дальнейших, даже чисто прикладных работах И. А. Вышнеградского заметна отличная математическая школа, изящество выкладок и геометрических построений. В 1854 г. И. А. Вышнеградский по рекомендации М. В. Остроградского получил место преподавателя математики в Михайловском Артиллерийском Училище, которое в следующем, 1855 г. было преобразовано в высшее учебное заведение — Михайловскую Артиллерийскую Академию.

И. А. Вышнеградскому, сначала в Артиллерийском Училище, а затем, после 1855 г., и в Академии, было поручено ведение репетиций по различным отделам математики и механики, большую часть лекций по которым читал сам М. В. Остроградский. Преподавательская деятельность в артиллерийских учебных заведениях, общение с артиллеристами и военными инженерами, Крымская война, обнаружившая техническую отсталость России и необходимость модернизации стрелкового оружия и артиллерии, оказали существенное влияние на направление научных интересов И. А. Вышнеградского. С исключительной энергией он начал заниматься прикладной механикой, знакомиться с техникой артиллерийского дела и, в осо-



Иван Алексеевич Вышнеградский

(1831—1895).

бенности, с техникой производства артиллерийского вооружения и боеприпасов, входя во все мелочи и детали.

В 1858 г. ему поручают чтение лекций по прикладной механике, и в этом же году он был командирован Академией в Киев, Шостку и Брянск для детального ознакомления с заводами артиллерийского ведомства. С этого времени деятельность И. А. Вышнеградского получила отчетливое прикладное направление. Он преподает различные отделы прикладной механики, ведет курсовое проектирование механизмов и начинает выступать как конструктор и инженер-практик.

Одновременно он вкладывает много сил в дело популяризации знаний по прикладной механике и машиностроению. В 1858 г. он читает публичные популярные лекции о машинах в зале Петербургского пассажа. Эти лекции, изданные в следующем году отдельной книгой, доставили И. А. Вышнеградскому широкую известность. Они являются образцовыми по ясности и блеску изложения. Некоторые из этих лекций не утратили своего интереса до сих пор. В 1860 г. И. А. Вышнеградский выпустил „Элементарную механику“, которая была утверждена военным ведомством в качестве обязательного учебника и в течение многих лет считалась в России лучшим руководством по этому предмету.

Администрация Артиллерийской Академии обратила внимание на то исключительное обстоятельство, что И. А. Вышнеградский сочетает фундаментальные знания в области математики и механики со знанием техники и, в особенности, технологии артиллерийского дела. В 1859 г. Артиллерийская Академия предоставляет И. А. Вышнеградскому длительную заграничную командировку для „подготовки к званию профессора практической механики“. К своему отъезду за границу И. А. Вышнеградский уже имел ряд опубликованных научных работ и серьезный практический инженерный опыт. Он был хорошо подготовлен к тому, чтобы критически освоить за границей все лучшее там, где его можно было найти.

И. А. Вышнеградский начал свою заграничную командировку с Гейдельберга, где он слушал лекции по теоретической и экспериментальной физике у знаменитого Кирхгофа и лекции по математике у Гессе и у Кенигсбергера. Затем он провел около года в Политехническом институте города Карлсруэ, где тогда работал Редтенбахер — один из основоположников научного машиностроения — и виднейший математик и упругист Клебш. Хотя И. А. Вышнеградский во время своей заграничной командировки и занимался некоторыми вопросами механики и теоретической физики (в частности, вопросами теории упругости и термодинамики), но главное свое внимание он уделил машиностроению. Он не только изучал науку о проектировании машин и технологию машиностроения у Редтенбахера (о котором он впоследствии отзывался с большим уважением), но и ознакомился с состоянием машиностроения в ряде других технических учебных заведений и на ряде заводов не только Германии, но и Франции и Англии.

По возвращении в 1862 г. в Россию И. А. Вышнеградский был утвержден профессором практической механики Михайловской Артиллерийской Академии, а вскоре и профессором механики Петербургского Технологического Института.

В обоих этих учебных заведениях он развернул интенсивную профессорскую деятельность. Он читал различные курсы по машиностроению и машиноведению (курс грузоподъемных машин, курс токарных станков, курс паровых машин и др.) и по смежным научным дисциплинам (различным отделам прикладной механики, теории упругости, термодинамике), а также вел курсовое и дипломное проектирование. *Он воспитал целое поколение русских инженеров-машиностроителей и был главой первой русской школы в области машиностроения.*

Эта интенсивная профессорская деятельность И. А. Вышнеградского была связана с научной разработкой ряда вопросов машиностроения.

Еще до заграничной командировки И. А. Вышнеградский отправил в „Артиллерийский журнал“ две работы о пороховых прессах* и в Бюллетени Российской Академии Наук работу о расчете некоторых деталей водяных двигателей. В 1863 г. он напечатал в „Артиллерийском журнале“ интересную работу „О прочности цепей“. Много других научных результатов в области машиностроения И. А. Вышнеградский изложил в своих лекциях. Лишь часть этих результатов увидела свет, так как далеко не все лекции И. А. Вышнеградского были напечатаны. Работы по регулированию, которые прославили его имя, были опубликованы в 1877—1878 гг. в „Известиях Технологического Института“—издании, которое было основано самим И. А. Вышнеградским для печатания работ по различным приложениям науки и техники. Почти одновременно эти работы были опубликованы по-французски и по-немецки и получили вскоре большую известность. В настоящее время общепризнано, что работа И. А. Вышнеградского „О регуляторах прямого действия“ лежит в основе современной теории регулирования. Нельзя также сомневаться в том, что эта работа оказала фундаментальное влияние на все дальнейшее развитие данной теории.

И. А. Вышнеградский не только сам вел научную разработку вопросов прикладной механики, но и привлек к этой работе ряд талантливых молодых ученых. В 1871 г. И. А. Вышнеградский организовал в Петербурге среди своих сотрудников и учеников „пентагональное общество“, душой которого был он сам. Это общество, целью которого была научная разработка вопросов прикладной механики и смежных дисциплин, получило свое название в связи с тем, что состояло из пяти членов, причем еженедельные заседания членов общества происходили поочередно у каждого из них. Этот небольшой кружок научных работ-

* Эти прессы оригинальной конструкции, служившие для изготовления призматического пороха, принесли И. А. немалую известность как инженеру не только в России, но и за границей, в частности, в Пруссии и Италии, где на ряде пороховых заводов эти прессы нашли применение.

ников, распавшийся через несколько лет, сыграл определенную роль в развитии прикладной механики в России, и его члены впоследствии получили большую известность; здесь следует отметить, кроме самого И. А. Вышнеградского, Н. П. Петрова — впоследствии одного из наиболее выдающихся русских механиков, „отца гидродинамической теории трения", который получил математическую и механическую подготовку у М. В. Остроградского, но первыми шагами которого в области прикладных дисциплин руководил И. А. Вышнеградский; В. Л. Кирпичева — впоследствии виднейшего организатора русского высшего технического образования и выдающегося ученого-инженера, автора замечательных руководств по механике и сопротивлению материалов; А. П. Бородина — впоследствии знаменитого железнодорожного инженера, автора ряда усовершенствований в конструкциях паровозов.

Не менее интенсивной была деятельность И. А. Вышнеградского и в области практики машиностроения.

С 1859 г. И. А. Вышнеградский вместе со своими товарищами по Артиллерийской Академии — И. В. Майевским, работы которого по внешней баллистике впоследствии получили мировую известность, и А. В. Гадолиным, выдающимся кристаллографом и виднейшим специалистом по артиллерийской технологии — состоял членом временного Артиллерийского комитета, на который был возложен ряд задач по перевооружению армии. С 1867 по 1878 г. И. А. Вышнеградский работал в Главном Артиллерийском Управлении в должности инженера-механика.

Шестидесятые и семидесятые годы — это годы революции в артиллерийском и стрелковом деле. За это время совершился переход от бронзовых пушек к нарезным стальным орудиям, от сферического ядра — к продолговатому снаряду, от обычного пороха—к призматическому пироксилиновому пороху, от *гладкоствольного ружья, заряжающегося с дула, к скорострельной* винтовке, имеющей патроны с металлическими гильзами.

Роль И. А. Вышнеградского в проводимых с 1863 г. преобразованиях русской артиллерии и в реконструировании заводов артиллерийского ведомства весьма велика. Крупнейшие заводы артиллерийского ведомства реконструировались по его проектам, и внутреннее оборудование многих других заводов и мастерских было выполнено по его указаниям и чертежам.

Деятельность И. А. Вышнеградского в области практики машиностроения не ограничивалась артиллерийским ведомством. Им были выполнены многочисленные проектные работы для железных дорог (в том числе пристань в Рыбинске с механической перегрузкой грузов из барж в вагоны) и отдельных частных предприятий.

Следует отметить, что в эти годы Вышнеградский не оставляет работу по популяризации технических знаний, вовлекая в эту работу своих учеников и сотрудников. В частности, в 1873 г. он прочел три публичные лекции „Об основных законах механической теории теплоты", которые получили не меньшую известность, чем его лекции о машинах 1858 г., и, как и последние, были изданы отдельной книгой.

Начало 80-х годов — момент наибольшей популярности И. А. Вышнеградского в русских технических кругах. Среди многих русских инженеров этого времени считалось общепризнанным, что в области прикладной механики и машиностроения И. А. Вышнеградский был „головой выше всех". Весьма многим был известен его талант ученого и профессора, его исключительные конструкторские и организаторские способности и, наконец, его необычайное трудолюбие.

Примерно с этого же времени И. А. Вышнеградский начал выдвигаться как организатор технического образования.

В 1884 г. И. А. Вышнеградский составил проект развития профессионального образования в России. Этот проект, представляющий значительный интерес во многих отношениях, предусматривал как подготовку инженеров с высшим образованием и техников со средним образованием, так и широкую

подготовку мастеров и квалифицированных рабочих различных специальностей. Этот проект с некоторыми изменениями был принят позднее и определенным образом улучшил дело технического образования в России. Особо следует отметить участие И. А. Вышнеградского в реорганизации Петербургского (директором которого он состоял с 1875 по 1884 г.) и в создании Харьковского Технологических Институтов.

Начиная со второй половины 70-х годов, И. А. Вышнеградский стал принимать участие в управлении железными дорогами и промышленными предприятиями (Юго-Западные железные дороги, Рыбинско-Бологовская дорога, Петербургское общество водопроводов и др.), занимаясь не только технической стороной их деятельности, но и их финансами, входя во все детали административных, финансовых, в частности, биржевых операций. Постепенно он сокращал свои профессорские обязанности, передавая сотрудникам и ученикам свои курсы и руководство проектированием. Когда стал очевиден отход И. А. от науки и техники и увлечение финансовой и биржевой деятельностью, многочисленные ученики тяжело переживали это и оценивали как существенную потерю для русской науки. Этот отход, однако, постепенно прогрессировал, и Вышнеградский стал биржевым дельцом и банковским деятелем, а не ученым инженером.

Его популярность в технических кругах стала падать, и его стали называть „профессором плутократии".

В 1887 г. И. А. Вышнеградский был назначен управляющим министерством финансов, а через год — министром финансов*. 9 декабря 1888 года И. А. Вышнеградский был избран почетным членом Российской Академии Наук.

В августе 1892 г. с И. А. Вышнеградским, сильно пере-

* В бытность министром финансов И. А. Вышнеградский организовал Палату мер и весов и пригласил в качестве руководителя этой Палаты Д. И. Менделеева.

утомленным напряженной работой в министерстве финансов, где неурожайный год вызвал много затруднений, сделался удар. Ему пришлось оставить пост министра финансов и почти совершенно отказаться от какой бы то ни было деятельности.

25 марта 1895 г. И. А. Вышнеградский умер.

Хорошо известна его жестокая, не считающаяся с интересами народа, экспортная политика в неурожайные 1891—1892 годы, его жесткая налоговая политика, его противодействие работе фабрично-заводских инспекторов и т. д. Однако деятельность И. А. Вышнеградского в качестве биржевика и министра финансов реакционного правительства Александра III не должна заставить нас забыть о его крупных заслугах как ученого и инженера.



СПИСОК
РАБОТ И. А. ВЫШНЕГРАДСКОГО

1. О движении системы материальных точек, определяемой полными дифференциальными уравнениями.

Рассуждение, представленное Иваном Вышнеградским физико-математическому факультету СПБ Университета для получения степени магистра. СПБ, 1854, 64 стр.

2. Sur les rayons de courbure des sections coniques [lu 1857] Bull. de l'Acad. Imp. des Sciences de St. Pétersbourg, 1858, XVI, стр. 78—80.

3. Лекции практической механики Отд. I и II. Курс теоретического отделения Михайловской Артиллерийской Академии, 1858. 195 стр., атл. черт. 12 л.

4. Общая теория паровых машин и теория паровозов с новыми исследованиями. Сочинение инженера-полковника Добронравова. СПБ, 1858.

Вестник промышленности, 1859, № 1, стр. 1—42.

5. Публичные популярные лекции о машинах, читанные в зале Пассажа И. Вышнеградским. СПБ, 1859, стр. 444, фиг. 83.

6. Практическая механика. Курс теоретического отделения Михайловской Артиллерийской Академии. Записки составил И. А. Вышнеградский. Отдел I. О водяных колесах.

Лит., СПБ, 1859—60, стр. 259, фиг. 77. Отдел II. О паровых машинах. Лит., СПБ, 1860, стр. 193, фиг. 99.

7. Элементарная механика (учебное руководство для военно-учебных заведений). Вып. 1, Курс III специального класса, 1860, стр. 274, табл. 12 л.

8. Несколько замечаний о пороховых прессах. Артиллерийский журнал. СПБ, 1860, № 4, стр. 237—259.

9. Вычисление наибольшего давления, испытываемого пороховою лепешкой в прессе Буше. Там же, стр. 260—269.

10. Sur la position des tirans en fer périphériques des roues hydrauliques. Bull. de l'Acad. Imp. des Sciences de St. Pétersbourg, 1861, т. III, N 4, стр. 249—251.

11. Теория сопротивления материалов. Лекции, читанные Иваном Вышнеградским в Михайловской Артиллерийской Академии в 1862 г. Лит., СПБ, стр. 163.

12. Практическая механика. Курс теоретического отдела 1-го технического класса Михайл. Арт. Акад. СПБ, 1862, стр. 232, 9 табл. с фигурами.

13. О прочности цепей. Артиллерийский журнал, 1863, № 10, стр. 781—810.

14. Курс построения машин. Составлен по лекциям, читанным проф. И. А. Вышнеградским в 1866/67 г. Издан для старшего академического класса в курсе 1866/67 г. Лит., СПБ, 1866/67 г. Стр. 397, 82, 105; 2 листа чертежей и 1 вкл. таблица.

15. Курс построения машин. Лекции для 2, 3 и 4 курсов механического отделения СПБ Технологического Института в 1867/68 г. Лит., СПБ, 1868 г., стр. 239, фиг. 135.

16. Механическая теория теплоты. По лекциям И. А. Вышнеградского. Составил и издал В. Кнаббе. Лит., СПБ, 1868, 2-е издание (первое издание не разыскано).

17. Теория и устройство подъемных машин. Курс, читанный в СПБ Технологическом Институте. Лит., СПБ, 1868, стр. 400, фиг. 179.

18. Подъемные машины. Лекции Ивана Алексеевича Вышнеградского. Составил В. Кнаббе. Лит. СПБ, 1869—1870, стр. 657.

19. Механическая теория теплоты. Лекции И. А. Вышнеградского, читанные в СПБ Технологическом Институте в 1870—71 г. Лит., СПБ, 1871, стр. 480, фиг. 5.

20. Курс подъемных машин. Лекции, читанные И. Вышнеградским в СПБ Практическом Технологическом Институте в 1871/72 г., СПБ, 1872, стр. 354, с атласом чертежей.

21. Живые двигатели. Лекции, читанные И. Вышнеградским в СПБ Практическом Технологическом Институте в 1871/72 г., СПБ, 1872.

22. Механическая теория теплоты. Лекции, читанные И. А. Вышнеградским в Технологическом Институте 1872/73 г., XVI, 614 стр., 6 табл., литография.

23. Основные законы механической теории теплоты. Три публичные лекции, читанные при ИРТО в аудитории Музея Прикладных Знаний, СПБ, 1873, стр. 35.

24. Механическая теория теплоты. Лекции, читанные в СПБ Технологическом Институте в 1873/74 г. Лит., СПБ, стр. 523, III—XIV, с фиг., 1 вкл. таблица.

25. Лекции о паровых машинах, читанные в Технологическом Институте в 1874/75 уч. г., СПБ, 1874, стр. 224.

26. Механическая теория теплоты. Лекции, читанные в СПБ Технологическом Институте в 1876 г. Лит., СПБ, вып. I, стр. 169; вып. II, стр. 143.

27. Sur la théorie générale des régulateurs. Mémoire de M. Wischnegradsky présenté par M. Tresca. Comptes Rendus Hebd. des Séances de l'Acad. des Sciences, Paris 1876, 31. VII, стр. 318—321.

28. О регуляторах прямого действия. Отчет о докладе И. А. Вышнеградского на беседе во втором отделе Русского Технического Общества 8 января 1877 г. Записки

Русского Технического Общества, 1877, вып. 4, стр. 308—311.

29. О регуляторах прямого действия. Известия СПБ Практического Технологического Института, 1877, стр. 21—62.

30. Ueber direktwirkende Regulatoren. Der Civilingenieur, 1877, XXIII, стр. 95—131.

31. О регуляторах непрямого действия. Известия СПБ Практического Технологического Института, 1878, стр. 1—48.

32. Лекции о паровых машинах, читанные в Технологическом Институте в 1877/78 уч. г. И. А. Вышнеградским. (Издание литографии Технологического института). СПБ, 1878, стр. 218 + 103, 2 атласа чертежей.

33. Прибавление к курсу паровых машин. СПБ, 1878, стр. 60, 3 табл.

34. Механическая теория теплоты. Лекции, читанные в СПБ Практическом Технологическом Институте проф. И. А. Вышнеградским в 1878/79 г. Вып. третий. Стр. 228, с фиг. в тексте.

35. Mémoire sur la théorie générale des régulateurs. Revue Universelle des Mines, 1878, № 4, стр. 1—38; 1879, № 5, стр. 192—227.

36. Курс паровых машин. Лекции, читанные в СПБ Практическом Технологическом Институте проф. И. А. Вышнеградским в 1878/79 г. Лит., СПБ, 1879, стр. 122, фиг. 17.

37. О законе Максвелла. Известия СПБ Практического Технологического Института, 1880—1881.

38. Механическая теория теплоты. Лекции, читанные в СПБ Практическом Технологическом Институте проф. И. А. Вышнеградским в 1880/81 г. Лит., СПБ, стр. 256.

39. Дополнение к лекциям по механической теории теплоты проф. Технологического Института И. А. Вышнеградского. Лит., СПБ, 1881, стр. 35.

40. Курс паровых машин. Лекции, читанные в СПБ Практическом Технологическом Институте в 1881/82 г. Лит., стр. 115, фиг. 17.

41. О реальных училищах. СПБ, 1882.

42. Курс подъемных машин. Лекции проф. И. А. Вышнеградского, читанные в 1871/72 г. Часть 1 и 2-я. Лит., СПБ, 1885/86? стр. 762, 1 альбом чертежей.

43. Приложения механической теории теплоты. Три главы из курса механической теории теплоты, читанного в СПБ Технологическом Институте проф. И. А. Вышнеградским. Лит., СПБ, 1891 г., стр. 220.



АУРЕЛЬ СТОДОЛА

(1859—1942)

(КРАТКИЙ БИОГРАФИЧЕСКИЙ ОЧЕРК)

Аурель Стодола родился 10 мая 1859 г. в семье владельца дубильни и небольшой фабрики ремней Андрея Стодолы — в маленьком словацком городке Липтовский Святой Микола (Liptowsky Svaty Mikulas).

Андрей Стодола и его жена Анна, урожденная Ковач, были словаками по национальности. Разговорный язык в семье был словацкий, и после окончания народной школы Ауреля Стодолу пришлось на некоторое время поместить на жительство в знакомое немецкое семейство, чтобы он смог научиться свободно говорить по-немецки. Хорошо подготовленный, Стодола поступает в реальное училище города Левица, а затем переходит в реальное училище города Кошица. В обоих училищах он является первым учеником своего класса и гордостью школы.

Окончив с отличием реальное училище, Стодола поступает в Будапештский политехникум, в котором за выдающиеся успехи получает стипендию и который оканчивает в 1878 г. В этом же году Стодола едет в Швейцарию, в Цюрих. Здесь он сначала слушает лекции в Цюрихском университете, а затем завершает свое техническое образование в уже тогда знаменитом Цюрихском политехникуме.

В 1881 г., получив в Цюрихе диплом инженер-механика с отличием, Стодола возвращается в Будапешт, где работает

короткое время в мастерских государственных венгерских железных дорог. В 1883 г., стремясь пополнить свое образование, Стодола едет в Берлин и работает в Высшей Технической Школе, находящейся в Шарлоттенбурге, одновременно посещая лекции по математике и теоретической физике (в частности, лекции Гельмгольца) в Берлинском университете. В 1884 г. он с той же целью переезжает в Париж, слушает лекции в Сорбонне и знакомится с некоторыми фабриками и заводами в окрестностях Парижа.

Пожар на фабрике отца заставляет Стодолу в конце 1884 г. вернуться на родину, где ему приходится руководить восстановлением отцовской фабрики ремней, а затем — вплоть до 1886 г. и управлять фабрикой.

С 1886 по 1892 г. Стодола работает на машиностроительном заводе фирмы Рустон и К^{0} в Праге. Этот завод в то время занимал ведущее место в области энергетического машиностроения в Австро-Венгрии. Здесь Стодола развил интенсивную и разностороннюю деятельность по расчету и конструированию паровых машин, гидротурбин, вентиляторов и воздуходувок для металлургических заводов.

Эта деятельность сформировала Стодолу как выдающегося инженера-машиностроителя. Здесь у Стодолы развился верный глаз и то творческое инженерное чутье, которые рождаются лишь в результате практической деятельности и которые позволяют конструктору быстро находить целесообразные и красивые формы машин и их отдельных частей, а также — почти на-глаз — определять их прочные размеры. И здесь же у Стодолы выработалась та твердая и верная рука, которая позволяла ему в течение всей дальнейшей жизни быстро переносить замыслы своей фантазии инженера на бумагу и кальку в виде совершенных по ясности и исполнению эскизов и чертежей.

В 1892 г. ректор Цюрихского политехникума Блейлер, внимательно следивший за успехами своего выдающегося питомца, предложил Стодоле место ординарного профессора.



Аурель Стодола

(1859—1942)

И в этом же году 33-летний инженер-механик Стодола, полный энергии и сил и обладавший теперь не только превосходной теоретической подготовкой, но и значительным практическим опытом, занимает кафедру машиностроения в Цюрихском политехникуме.

Эту кафедру в Цюрихском политехникуме Стодола занимал свыше 35 лет — вплоть до 1929 г., когда по достижении предельного 70-летнего возраста он вышел в отставку. Деятельность Стодолы придала кафедре необычайный блеск и не мало способствовала закреплению за Цюрихским политехникумом славы одной из лучших технических школ мира.

Стодола был прекрасным лектором и замечательным руководителем дипломного проектирования. Он создал и непрерывно развивал машинную лабораторию при кафедре, которая считалась одной из лучших в Европе. Но основная деятельность Стодолы, принесшая ему мировую известность и притягивавшая к нему в Цюрих студентов и молодых инженеров со всего мира (в том числе и из России), — это деятельность инженера-исследователя.

Здесь следует отметить три области, где научная деятельность Стодолы оставила фундаментальные следы:

1) теория автоматического регулирования,

2) научные основания проектирования и конструирования паровых турбин,

3) научные основания проектирования и конструирования газовых турбин.

В 1893 г. в тогда еще мало известном журнале „Schweizerische Bauzeitung“ появляется его работа „О регулировании турбин. I“, а в следующем, 1894 г. в том же журнале — ее продолжение „О регулировании турбин. II“.

В этих работах Стодола выступает как прямой последователь Вышнеградского. Подобно тому как Вышнеградский правильной идеализацией задачи, в частности ее линеаризацией, решил важнейшую задачу прямого регулирования, А. Стодола

смело идеализирует и линеаризирует сложную задачу непрямого регулирования. В результате область непрямого регулирования оказалась в сфере инженерной теории регулирования.

Стодола в первую очередь — инженер. Его интересуют прежде всего числовые результаты, нужные практике. Но он отчетливо понимает важность теоретического исследования и стремится каждую интересующую его проблему сделать доступной математическому анализу. С этой целью Стодола, с одной стороны, максимально упрощает задачу, не забывая о числовых результатах, нужных практике, а с другой стороны, если готовый математический аппарат его не удовлетворяет, он обращается к математикам или действует сам, пытаясь этот аппарат усилить и усовершенствовать.

Эти черты характерны для всей научной деятельности Стодолы. Но они уже проявились в полной мере и в этих первых работах, связанных с регулированием.

Научный контакт с А. Гурвицем, который одновременно со Стодолой был приглашен в Цюрих, побудил Стодолу продумать вопросы, связанные с использованием математики для потребностей быстро развивающейся техники и выступить через два года на Первом Интернациональном Математическом Конгрессе в Цюрихе (1897) со специальным докладом „Об отношении техники к математике“, в котором Стодола высказал ряд интересных мыслей и который получил большую известность.

В связи с работами по теории регулирования следует отметить еще одно обстоятельство, характерное для всей научной деятельности Стодолы. Стодола являлся горячим поклонником эксперимента, и при этом как такого эксперимента, который ставится для проверки теории, так и такого эксперимента, который дает возможность нахождения величин или зависимостей, используемых для построения теории.

Результаты, полученные Стодолой в области теории регулирования турбин, были тщательно сверены с экспериментами.

Интересно, что и А. Гурвиц придавал определенное значение этим опытам, считая, что в конечном счете они подтверждают правильность полученных им неравенств и даже упомянул об этих опытах в своей работе „Об условиях, при которых уравнение имеет только корни с отрицательными действительными частями", опубликованной в 1895 г. в „Mathematische Annalen".

Следующая фундаментальная работа Стодолы в области регулирования „Принцип регулирования Сименсов и американские инерционные регуляторы", появившаяся в 1899 г. в журнале Общества германских инженеров, относится к теории прямого регулирования.

В этой работе Стодола впервые исследует регуляторы, в которых осуществляется т. н. воздействие по производной. Сначала он распространяет на эти регуляторы линеаризованную теорию Вышнеградского. Затем очень простым приемом ему удается учесть влияние сухого трения, т. е. решить важную нелинейную задачу. Наконец, он точно устанавливает преимущества и недостатки плоских регуляторов, у которых для получения перестановочного усилия используются как центробежные, так и тангенциальные силы инерции.

Вторым, еще более значительным и, можно сказать, основным делом жизни Стодолы как ученого является систематизация и фундаментальное развитие научных основ расчета и конструирования паровых турбин.

Стодола заинтересовался паровыми турбинами еще будучи инженером завода „Рустон" в Праге (первые эффективно работающие небольшие паровые турбины Лаваля и Парсонса появились в 1882—1884 гг.), но вплотную он сумел заняться этими новыми тогда двигателями лишь в Цюрихе.

Он отчетливо понимал те противоречия, которые возникли в последнее десятилетие XIX в. между техническими данными паровых машин, даже если учитывать реальные возможности улучшения этих данных, и запросами промышленности, которая

для обслуживания центральных электрических станций потребовала двигателей более мощных, более быстроходных и более экономичных. И Стодола сумел предвидеть в паровых турбинах будущих могучих соперников поршневых паровых машин уже тогда, когда паровые турбины еще не вышли из стадии экспериментальных установок и когда паровые машины, используя тройное расширение и перегрев пара, достигли весьма высокой эффективности.

С 1900 г. начинают появляться журнальные статьи Стодолы, посвященные различным вопросам теории и практики конструирования и эксплоатации паровых турбин, и появление этих статей прекращается лишь в связи с его смертью в 1942 г.

Чтобы оценить заслуги Стодолы в деле установления научных принципов проектирования и конструирования паровых турбин, нужно ясно представить себе сложность и разносторонность тех научных проблем, которые возникают при исследовании рабочего процесса паровой турбины и решение которых, хотя бы приближенное, нужно иметь проектировщикам и конструкторам турбин.

Здесь скрещиваются проблемы термодинамики (например, вопросы, относящиеся к свойствам водяного пара, находящегося при различных условиях), проблемы аэрогидродинамики (например, вопросы, связанные с истечением пара через расширяющиеся сопла с большими скоростями), проблемы теории упругости и сопротивления материалов (например, вопросы, связанные с определением формы и прочных размеров турбинных дисков и лопаток), проблемы металловедения (например, техника производства специальных легированных сталей для сопел и лопаток) и т. д.

Особенное место среди этих задач занимают вопросы о колебании частей турбин — турбинных валов, дисков, лопаток, фундаментов и т. д. Некоторые из этих вопросов привлекли внимание инженеров сразу же после появления первых турбин,

другие приобрели актуальность лишь позднее, с увеличением мощности турбин.

В отношении анализа и оценки работ Стодолы, связанных с паровыми турбинами, мы ограничимся немногими замечаниями.

Заслуга постановки многих из тех задач, о которых только что было упомянуто, в ряде случаев — заслуга их эффективного решения, почти во всех случаях — заслуга систематизации и проверки полученных ранее результатов, принадлежит Стодоле.

Первое систематическое изложение научных оснований проектирования и конструирования паровых турбин было дано Стодолой в 1902 г. — на съезде Общества германских инженеров в Дюссельдорфе.

Доклад, явившийся крупным событием в технической жизни Европы, был в следующем году (в измененном и расширенном виде) издан в виде отдельной монографии*.

Эта монография, переработанная вскоре в целое руководство по паровым турбинам, имела совершенно исключительное значение в деле развития турбостроения. Руководство, которое непрерывно перерабатывал Стодола, росло и совершенствовалось в той же мере, в какой росла и совершенствовалась мировая наука о турбинах. Оно выдержало шесть немецких изданий и было переведено на русский, французский и английский языки.

Эта знаменитая книга, получившая название „библии проектировщиков тепловых двигателей“, содержит не только рецепты для решения задач, возникающих у инженеров при обычном заводском проектировании турбин, но и многочисленные научные сведения и эмпирические данные, могущие служить отправным пунктом новых научных исследований в области паровых турбин и других тепловых двигателей.

---

* Die Dampfturbinen und die Aussichten der Wärmekraftmaschinen. Berlin, Springer. S. 220, 1903.

Наряду с паровыми турбинами, внимание Стодолы привлекли и газовые турбины. Замечательно, что Стодола начал теоретически заниматься газовыми турбинами или, как иногда говорят, турбинами внутреннего сгорания, еще тогда, когда они не имели никакого промышленного значения. Уже во втором издании (1904) своей монографии о паровых турбинах Стодола поместил добавление о теоретических основах работы газовых турбин, хотя в то время была лишь слабая надежда на возможность эффективного промышленного использования газовых турбин.

Сильный толчок вся проблема газовых турбин получила благодаря появлению нескольких опытных газовых турбин, построенных инженером Гольцвартом в 1909—1911 гг., испытания которых дали обнадеживающие результаты. Эти опыты Гольцварта, а также книга Гольцварта* привлекли особое внимание Стодолы. Стодола не был согласен с рядом утверждений Гольцварта, и дискуссия между Гольцвартом и Стодолой послужила к уяснению ряда вопросов, относящихся к теории газовых турбин, в частности, вопроса о способе вычисления коэффициента полезного действия газовой турбины.

Научные основания проектирования и конструирования газовых турбин представляют еще более сложное сцепление вопросов аэродинамики, термодинамики, теории теплопроводности, металловедения и т. д., чем то, с которым имел дело Стодола в теории паровых турбин. И здесь, как и в теории паровых турбин, Стодола внес ясность во многие запутанные вопросы. При этом и здесь Стодола действовал как путем использования средств современного математического анализа, так и путем постановки экспериментов и с самими газовыми турбинами, и с отдельными их узлами.

В книге Стодолы, начиная с пятого издания (1922), паровые и газовые турбины получили равноправность, но осуществлен-

* Holzwarth. Die Gasturbine. Theorie, Konstruktion und Betriebergebnisse von zwei ausgeführten Maschinen, München, 1911.

ные к этому времени газовые турбины оставались еще, по сути дела, опытными установками. В этом издании Стодола сравнительно подробно исследует несколько процессов, возможных для газовых турбин, и указывает на ряд преимуществ этого рода двигателей по сравнению с обычными двигателями внутреннего сгорания и с паровыми турбинами.

Проблема эффективно работающих промышленных газовых турбин была решена лишь в самые последние годы жизни Стодолы, а частично уже после его смерти. В настоящее время многие заводы выпускают мощные газовые турбины, экономные в отношении расхода топлива и надежные в эксплоатации.

Но еще за несколько лет до смерти Стодолы началось интенсивное конструирование газовых турбин для совсем иных целей — для использования их в реактивных самолетных двигателях. Как известно, и здесь техника быстро достигла существенных успехов, и в настоящее время у всех крупных государств имеются самолеты, снабженные газотурбинными двигателями.

Действие и промышленных, и авиационных газотурбинных двигателей опирается, если рассматривать вопрос с достаточно широкой точки зрения, на одни и те же научные основания. И заслуга установления этих научных оснований проектирования и конструирования газовых турбин путем систематизации и дальнейшей разработки имевшихся, часто весьма неполных и неточных, данных в значительной степени принадлежит Стодоле.

Помимо замечательной исследовательской деятельности, Стодола не чуждался конкретной конструкторской практики. Он руководил проектированием многих крупных установок и был консультантом ряда машиностроительных заводов. В связи с этой деятельностью Стодола опубликовал ряд статей, посвященных описанию отдельных машин и силовых устройств. Эти статьи особенно ценны подробными и тщательно подобранными цифровыми данными об их эксплоатации.

Влияние Стодолы на европейскую технику было исключительно велико. На съездах и конференциях ему оказывались различные знаки внимания. Он говорил мало и коротко, но его немногие слова были всегда продуманы и производили большое впечатление. Так, большое впечатление произвели его выступления против узкой специализации инженеров, за подготовку инженеров с широким научным образованием и выступления за создание при высших технических школах специализированных исследовательских институтов.

Стодола был почетным членом многих научных обществ и высших школ и академий.

Стодолу часто называют швейцарцем. Как мы видели, это неверно. Стодола был словаком по национальности. Его жена, с которой он обвенчался в 1887 г., также была словачкой. Известно, что, живя в Праге и состоя инженером фирмы Рустон, Стодола принимал участие в чехословацком национальном движении.

В 1905 г. город Цюрих, в ознаменование заслуг Стодолы перед Цюрихским политехникумом и городом Цюрихом дал ему права швейцарского гражданина. Стодола и сам иногда называл Швейцарию своей второй родиной. Но он не прерывал связей и со своей первой родиной. Биографы Стодолы отмечают, что до войны 1914—1918 гг. Стодола проявлял большой интерес к требованию словацкой автономии и принимал участие в деятельности, направленной к предоставлению словакам равных прав с венграми.

Стодола умер 25 декабря 1942 г., в разгар второй мировой войны. Многие технические журналы мира посвятили ему некрологи, отмечавшие его исключительные заслуги в области теории регулирования и, в особенности, в области создания научных оснований конструирования паровых и газовых турбин.



СПИСОК
РАБОТ А. СТОДОЛЫ

1. Ueber die Regulierung von Turbinen. I. Schweizerische Bauzeitung 1893, B. **22**, стр. 113, 121, 126, 134.

2. Ueber die Regulierung von Turbinen. II. Schweizer. Bauzeitung 1894, B. **23**, стр. 108, 115.

3. Zur Frage der Regulierung hydraulischer Motoren. Schweizer. Bauzeitung 1894, B. **23**, стр. 55.

4. Die Beziehungen der Technik zur Mathematik. Vortrag auf dem I. Internat. Mathem. Kongress in Zürich. Z. des V. D. I. (Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure) 1897, B. **41**, стр. 1257.

5. Die Dampfmaschinen in der Schweiz. Landesausstellung in Genf. Schweizer. Bauzeitung 1897, B. 29, стр. 71, 80, 89.

6. Versuche an einer dreistüfigen Dampf-Pumpmaschine im Wasserwerk der Stadt St. Gallen. Schweizer. Bauzeitung 1898, B. **32**, стр. 54.

7. Die Kreisprozesse der Gasmaschine. Z. des V. D. I. 1898, B. **42**, стр. 1045, 1088.

8. Die amerikanischen „Inertie“ Regulatoren. Schweizer. Bauzeitung 1899, B. **33**, стр. 178.

9. Das Siemensche Regulirprinzip und die amerikanischen „Inertie“ Regulatoren. Z. des V. D. I. 1899, B. **43**, № 18, стр. 506—516; № 20, стр. 573—579.

10. Die Dampfturbinen. Schweizer. Bauzeitung 1900, B. 35, стр. 223, 233.

11. Die Dampfmotoren an der Weltausstellung in Paris 1900. Schweizer. Bauzeitung 1900, B. **36**, стр. 159, 169, 204, 211, 219, 231, 243.

12. Einiges vom Internationalen Ingenieur-Kongress in Glasgow 1901. Schweizer. Bauzeitung 1901, B. **38**, стр. 138.

13. Von der Industrie, Kunst und Gewerbeausstellung in Düsseldorf. Schweizer. Bauzeitung 1902, B. **40**, стр. 114.

14. Die Dampfturbinen und ihre Aussichten als Wärmekraftmaschinen. Z. d. V. D. I. 1903, B. **47**, стр. 1, 47, 127, 164, 202, 268, 334.

15. Zuschrift an die Redaktion: Die Dampfturbinen etc. Z. des V. D. I. 1903, B. **47**, стр. 1787.

16. Strömungen von Gasen und Dämpfen durch Rohre mit veränderlichem Querschnitt. Z. des V. D. I. 1903, B. 47, стр. 1787.

17. Die Dampfturbinen und die Aussichten der Wärmekraftmaschinen. Berlin, Springer. 1903, стр. 220.

18. Theoretische Betrachtung über eine neue Art der Umsetzung von Dampfenergie in mechanische Arbeit. Schweizer. Bauzeitung 1904, B. **43**, стр. 34.

19. Die Dampfturbinen. Mit einem Anhang über die Aussichten der Wärmekraftmaschinen und über die Gasturbine. 2. Auflage. Berlin, Springer, 1904, стр. 368.

20. Der mechanische Wirkungsgrad und die indirekte Leistung der Gasmaschinen. Z. des V. D. I. 1905, B. **49**, стр. 517.

21. Die Dampfturbinen. Mit einem Anhang über die Aussichten der Wärmekraftmaschinen und über Gasturbine. 3. Auflage, Berlin, Springer, 1905, стр. 454.

22. Die Nebenspannungen in rasch umlaufenden Scheibenrädern. Z. des V. D. I. 1907, B. **51**, стр. 1269.

23. Verluste in den Schaufeln von Freistrahl-Dampfturbinen. Z. des V. D. I. 1907, B. **51**, стр. 2039, 2040.

24. Zur Theorie der Dampfturbinen. Zeitschrift für das gesamte Turbinenwesen, 1907, B. стр. 245, 246, 541.

25. Die Dampfturbinen. Mit einem Anhang über die Aussichten der Wärmekraftmaschinen und über die Gasturbine. 4. Auflage, Berlin, Springer, 1910, стр. 700.

26. Die neue hydraulische Regelung der Sulzer-Dampfturbine und Versuche an der 2000 KW Turbine des Basler Elektrizitätswerkes. Z. des V. D. I. 1911, B. **55**, стр. 1709, 1794, 1846.

27. Zum Wirkungsgrad der Explosionsturbine. Z. des V. D. I. 1912, B. **56**, стр. 1005.

28. Die Unterkühlung beim Ausfluss gesättigten Dampfes. Schweizer. Bauzeitung 1913, B. **61**, стр. 229.

29. Die Unterkühlung beim Ausfluss gesättigen Dampfes mit Rücksicht auf die Molekularvorgänge. Z. des V. D. I. 1913, B. **57**, стр. 1776, 1820, 1860.

30. Über die Schwingungen von Dampfturbinenrädern. Schweizer. Bauzeitung 1914, B. **63**, стр. 251, 271, 318.

31. Neue Versuche über die Unterkühlung beim Ausfluss gesättigten Dampfes. Schweizer. Bauzeitung 1914, B. **64**, стр. 168.

32. Die Dampfturbinen und Turbogebläse auf der Schweiz. Landausstellung 1914. Schweizer. Bauzeitung 1915, B. **65**, стр. 1, 24, 27.

33. Künstliche Gliemassen: eine dankbare chirurgisch-mechanische Aufgabe. Z. des V. D. I. 1915, B. **59**, стр. 842.

34. On Undercooling of Steam in Nozzles. Engineering 1915, vol. **99**, стр. 81, 643, 685.

35. Neue Beobachtungen über die krit. Umlaufzahlen von Wellen. Schweizer. Bauzeitung 1916, B. **68**, стр. 197, 209.

36. The Steam Flow in a Compound Steam Turbine. Engineering 1916, vol. **102**, стр. 2.

37. Neue Beobachtungen über die krit. Umlaufzahlen von Wellen. Schweizer. Bauzeitung 1917, B. **69**, стр. 93.

38. Neue Beobachtungen über die krit. Umlaufzahlen von Wellen. Schweizer. Bauzeitung 1917, B. **70**, стр. 229, 241.

39. Hohlkehlenschärfe und Dauerbiegung. Schweizer. Bauzeitung 1918, B. **71**, стр. 145.

40. New Critical Shaft Speeds as Effects of the Gyroscopic Disc-Action. Engineering 1918, vol. **106**, стр. 2.

41. Neue kritische Drehzahlen als Folge der Kreisewirkung der Laufräder. Zeitschrift für das gesamte Turbinenwesen 1918, стр. 253, 264, 269.

42. Strömung in Düsen und Strahlvorrichtungen, mehrdimensional betrachtet. Z. des V. D. I. 1919, B. **63**, стр. 31, 96.

43. Zuschriften an die Redaction: Kritische Drehzahlen rasch umlaufender Wellen. Z. des V. D. I. 1919, стр. 867, 870. Fussnoten: Schweiz. Bauzeitung 1914, B. 64, стр. 168; Schweiz. Bauzeit. 1916, B. 68, стр. 210; Dinglers Polytechnisches Journal 1918, стр. 117.

44. Leistungsversuche an einer Gegendruckturbine der Ersten Brünner Maschinenfabriks-Gesellschaft in der Nestmitzer Zuckerraffinerie in Nestmitz n. E. Z. des V. D. I. 1919, B. **63**, стр. 1163 (mit E. Josse).

45. Zur Theorie der kritischen Drehzahlen. Zeitschrift für das gesamte Turbinenwesen 1920, B. I, стр. 18.

46. Dampf und Gasturbinen. Mit einem Anhang über die Aussichten der Wärmekraftmaschinen. 5. Auflage, Berlin, Springer 1922, стр. 1125.

47. Kritische Wellenstörung infolge der Nachgiebigkeit des Ölpolsters im Lager. Schweizer. Bauzeitung 1925, B. **85**, стр. 265.

48. Leistungsversuch an einer Gegendruckdampfturbine. Z. des V. D. I. 1925, B. **69**, стр. 1177.

49. Dampf und Gasturbinen. Mit einem Anhang über

die Aussichten der Wärmekraftmaschinen. 6. Auflage, Berlin, Springer, 1925, стр. 1157.

50. The Efficiency of Reaction Blading. Engineering 1925, vol. 120, стр. 427.

51. The Efficiency of Reaction Blading. Engineering 1925, стр. 775.

52. Zur Theorie des Wärmeübergangеs von Flüssigkeiten oder Gasen an feste Wände. Schweizer. Bauzeitung 1926, B. 88, стр. 243.

53. Wärmeübergang in Grenzschichten bei stark veränderlicher Grundströmung. Schweizer. Bauzeitung 1927, B. 89, стр. 193, 262.

54. Wärmeübergang in Grenzschichten bei grossen Temperatur Unterschieden zwischen Wand und Flüssigkeit. Schweizer. Bauzeitung 1927, B. **89**, стр. 261.

55. Leistungsversuche an einer 11000 KW Zoelly-Dampfturbine. Z. des V. D. I. 1927, B. **71**, стр. 747.

56. Tests on a 11000 KW Zoelly Steam Turbine. Engineering 1927, vol. 124, стр. 579.

57. Leistungsversuche an einem Dieselmotor mit Büchi'scher Aufladung. Z. des V. D. I. 1928, B. **72**, стр. 421.

58. Versuche über die Strömungsverhältnisse an der Austrittskante eines vereinfachten Dampfturbinen-Zeitschaufel-Modells. Schweizer. Bauzeitung, 1930, B. **95**, стр. 309.

59. Nachruf auf Aug. Rateau. Z. des V. D. I. 1930, B. **74**, стр. 375.

60. Gedanken zu einer Weltanschauung vom Standpunkte des Ingenieurs. Berlin. Springer 1931.

61. Gedanken zu einer Weltanschauung vom Standpunkte des Ingenieurs. Z. des V. D. I. 1931, B. **75**, стр. 1228.

62. Der Sulzer — Einrohr — Dampferzeuger. Z. des V. D. I. 1933, B. **77**, стр. 1225.

63. Regulierversuche am Einrohr — Dampferzeuger der Gebr. Sulzer A. G. Winterthur. Schweizerische Bauzeitung, 1934, B. **103**, стр. 6.

64. Leisungs — und Regelversuche an einem Velox — Dampferzeuger. Z. des V. D. I. 1935, B. **79**, стр. 429.

65. Wärmespannungen in ungleichmässig erwärmten Rohren. Z. des V. D. I. 1936, B. **80**, стр. 158.

66. Geheimnisvolle Natur. Weltanschauliche Betrachtungen. Zürich. Orell — Fussil 1937.

67. Leistungsversuche an einer Verbrennungsturbine. Z. des V. D. I. 1940, B. 84, стр. 17.

68. Leistungsversuche an einer Gleichdruckgasturbine der A. G. Brown, Boveri und C-ie in Baden. Schweizerische Bauzeitung 1940, B. **115**, стр. 13.



КОММЕНТАРИИ К РАБОТЕ Д. К. МАКСВЕЛЛА „О РЕГУЛЯТОРАХ“

[1] (К стр. 9). Если не заботиться о точном переводе, то для лучшего понимания дальнейшего текста эту фразу Максвелла следует изложить так: „В одном типе регулирующих устройств, которые мы назовем модераторами, или сопротивление возрастает со скоростью или движущая сила уменьшается с увеличением скорости“. Дело в том, что Максвелл понимает под *модератором* приспособление, которое умеряет (т. е. делает меньшей) переменность установившейся угловой скорости при изменении нагрузки на регулируемый объект, т. е. то, что мы сейчас называем *статическим регулятором.*

Регуляторами в точном смысле этого слова он называет те устройства, которые сейчас называются *астатическими регуляторами,* т. е. такие устройства, которые в принципе обеспечивают постоянство заданного значения угловой скорости при изменении нагрузки.

[2] (К стр. 9). Здесь Максвелл имеет в виду фрикционный регулятор часового механизма, служащего для придания равномерного вращения астрономическим приборам, например, экваториалу.

[3] (К стр. 10). Например, при увеличении веса гири, вращающей экваториал, при увеличении давления пара, подводимого к паровой машине при неизменной нагрузке, и т. д.

[4] (К стр. 11). Учет масс регулятора или одновременный учет масс регулятора и трения повышает порядок системы дифференциальных уравнений, описывающих процесс регулирования, на две единицы и характеристическое уравнение имеет 3-ю степень. Поэтому наряду с действительным корнем характеристическое уравнение может иметь два комплексных сопряженных корня, определяющих колебательную составляющую движения. Эти корни характеристического уравнения и имеет в виду Максвелл.

[5] (К стр. 11). Максвелл различает три рода *модераторов* (описание их приводится ниже в современных терминах):

I род — фрикционные статические регуляторы, т. е. такие, у которых выравнивание скорости осуществляется изменением момента сил трения, приложенных к регулируемому объекту; теперь название „модератор“ сохранилось только за этими механизмами;

II род — обычные центробежные статические регуляторы (например, регулятор Уатта);

III род — жидкостные статические регуляторы (например, регулятор, использующий так называемый водяной тормоз Томсона).

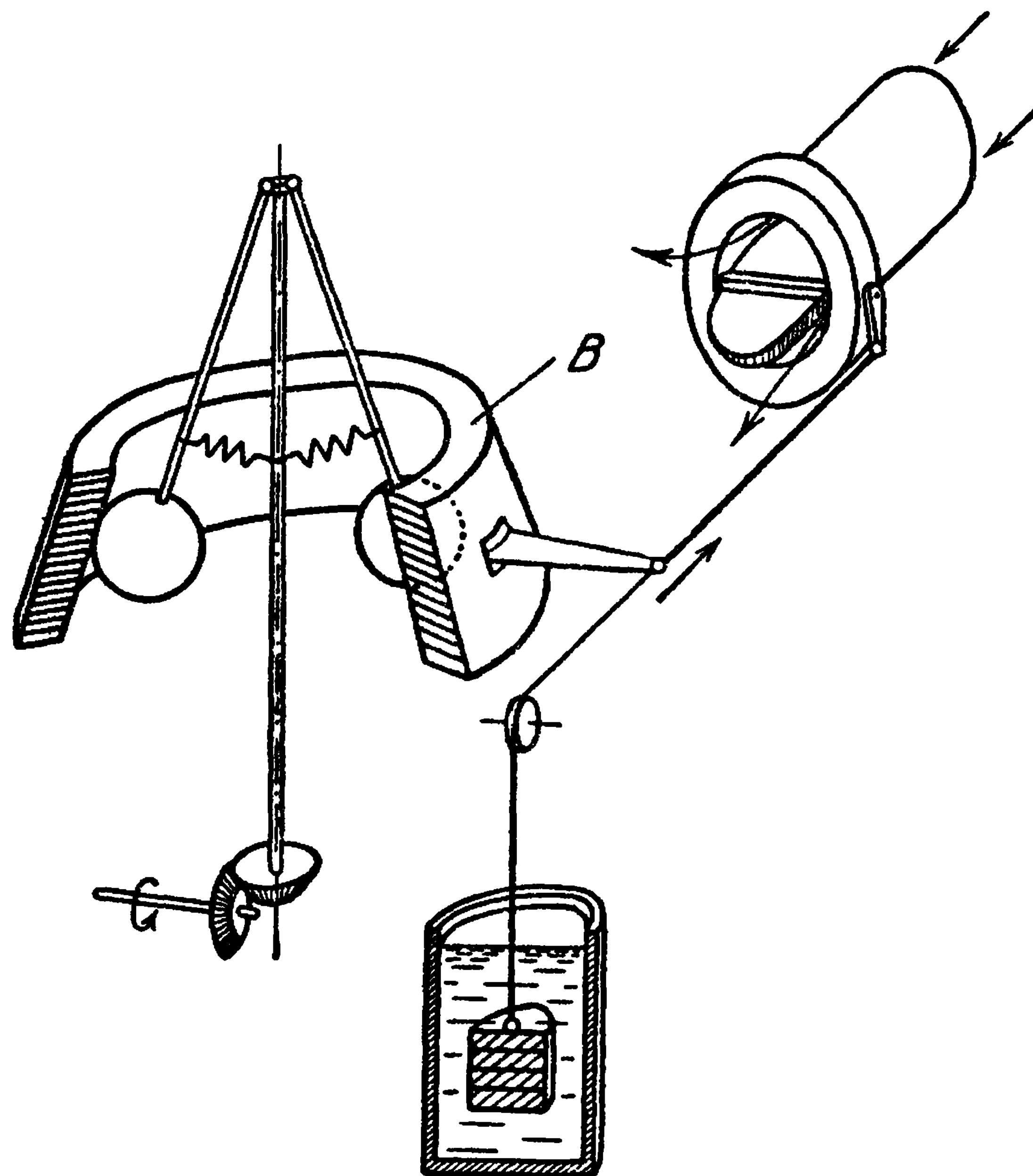
Максвелл называет *регулятором* любой астатический регулятор. Их он также разбивает на три рода:

I род —фрикционные астатические регуляторы, у которых центробежный маятник действует на промежуточное тело, обладающее инерцией; это тело связано с заслонкой, регулирующей, например, подвод пара, или с тормозом, нагружающим машину (например, тот регулятор Дженкина, о котором далее будет итти речь, фиг. 1);

II род — обычный центробежный астатический регулятор, действующий непосредственно на заслонку или тормоз (например, регулятор Уатта с шарами, движущимися по параболе, фиг. 2).

III род — жидкостный астатический регулятор (например, регулятор Сименса, фиг. 3).

[6] (К стр. 12). Одновременно с Максвеллом регулятором Дженкина занимался В. Томсон (Кельвин)*, который, однако, не дал теории этого регулятора.

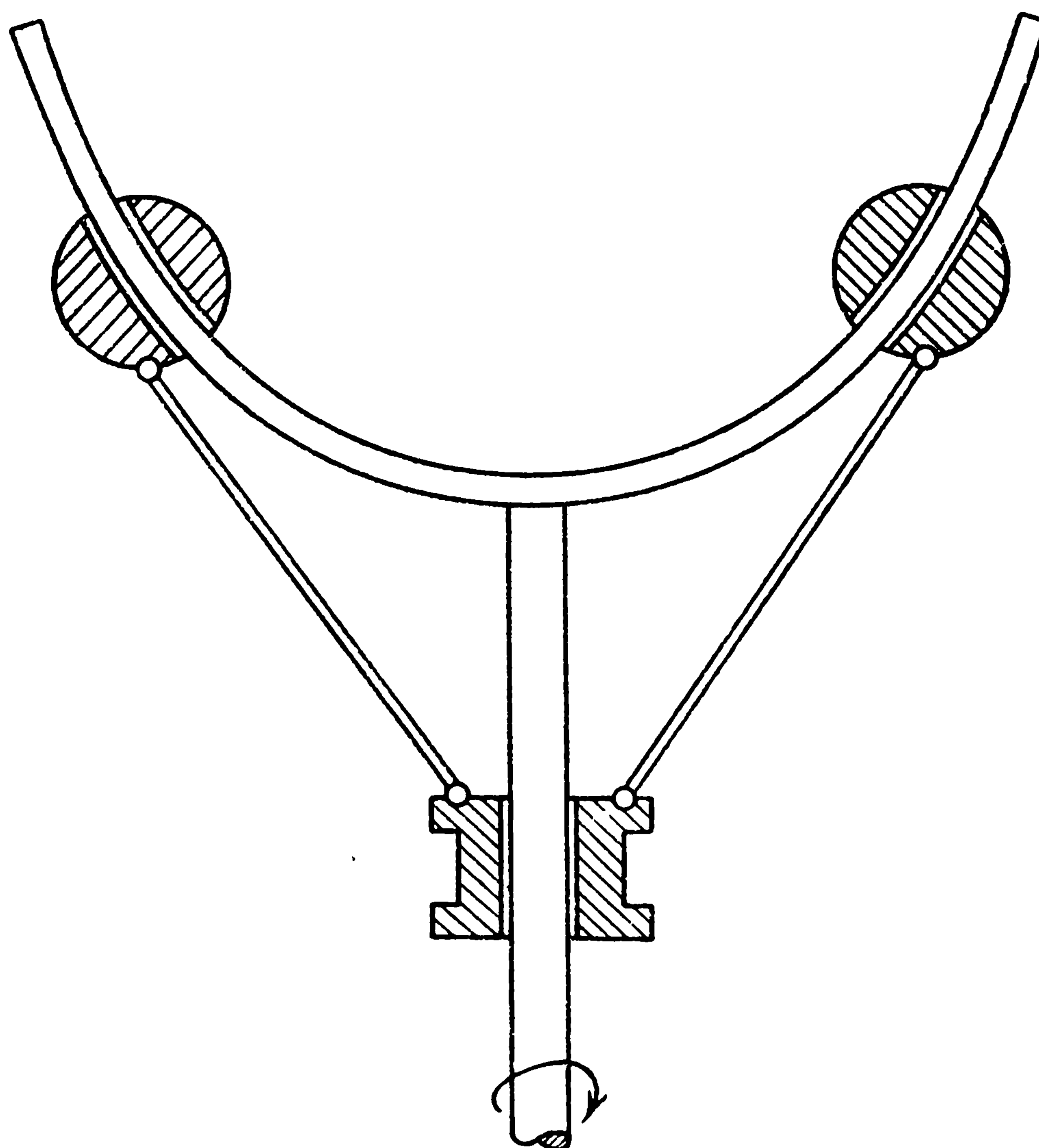


Фиг. 1. Регулятор Дженкина

[7] (К стр. 12). Такое положение имеет, например, место в центробежном регуляторе, у которого грузы движутся по параболе (фиг. 2). Как известно, при этом шары, если они не связаны системой рычагов с заслонкой, могут быть в равновесии в любом положении только при одном единственном значении угловой скорости. Это значение угловой скорости задается

* Lord Kelwin (Sir William Thomson), On a New Form of Centrifugal Governor. Mathematical and Physical Papers, vol. IV, стр. 460—463.

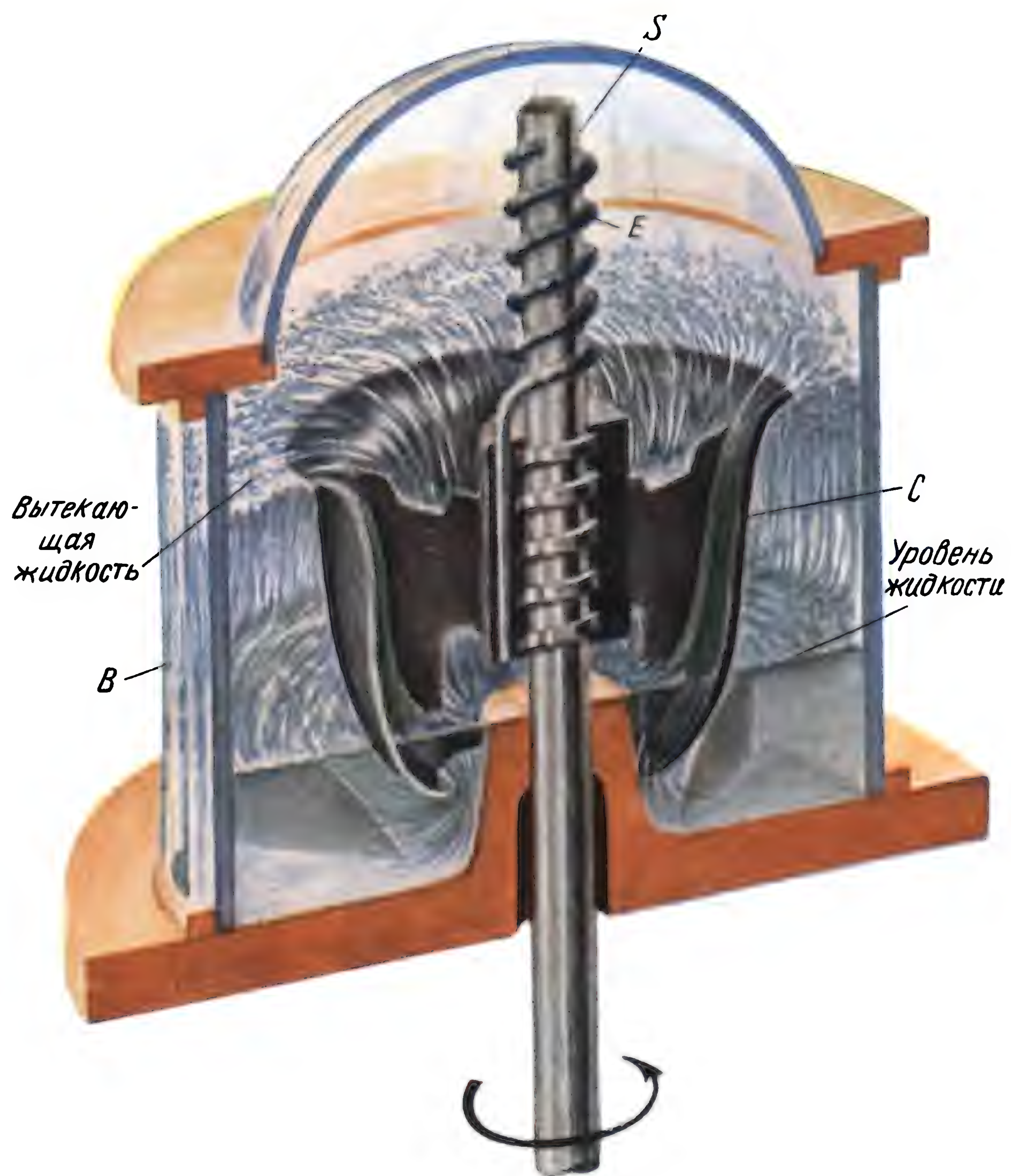
параметром параболы. В связанной системе машина — регулятор равновесное положение муфты, возможное лишь при этом единственном значении угловой скорости, определяется



Фиг. 2. Параболический регулятор

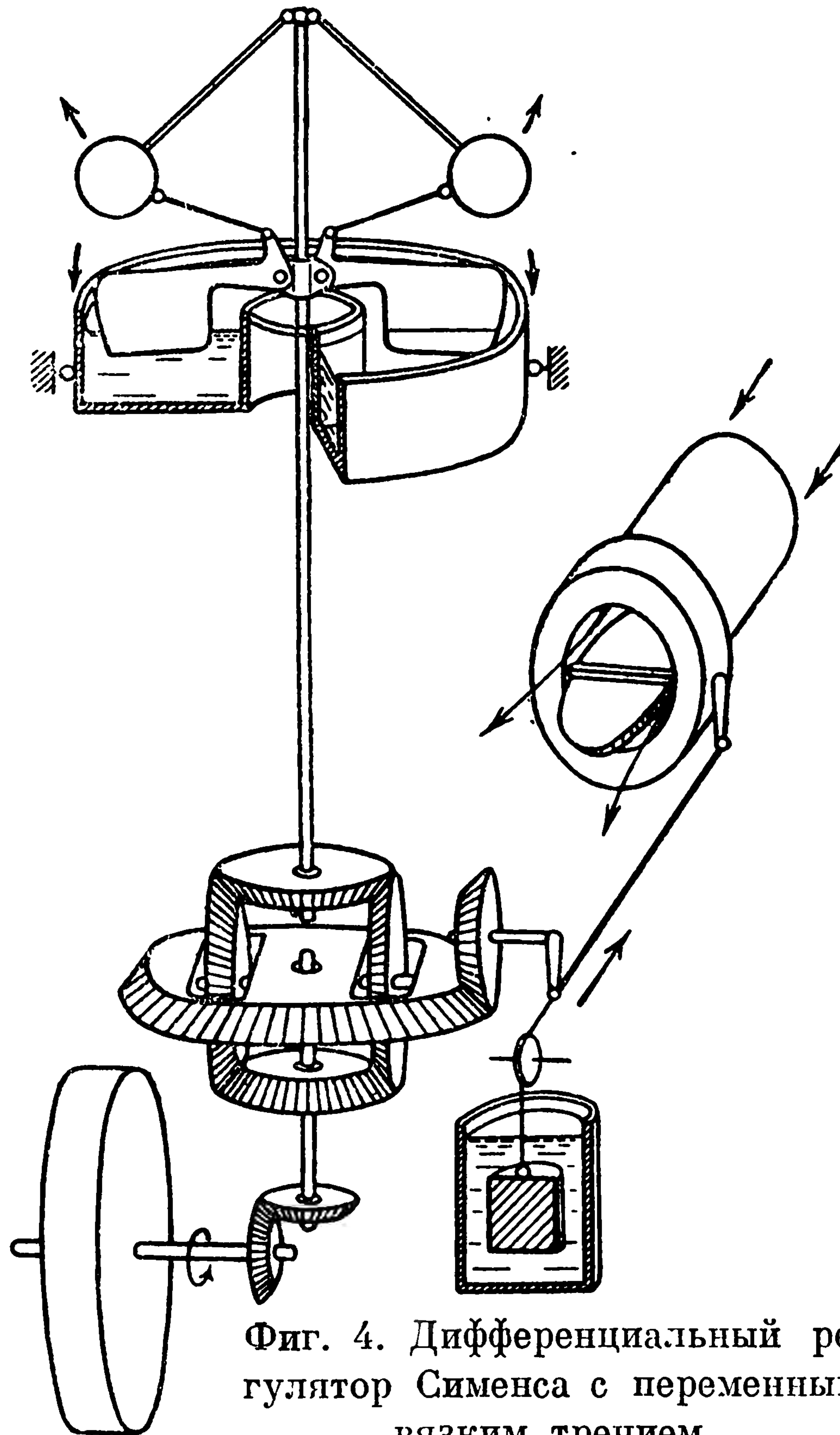
равновесным положением заслонки или тормоза, т. е. таким ее положением, когда крутящий момент двигателя точно равен нагрузке. Заметим, что подобные регуляторы могут устойчиво работать только на машинах, имеющих самовыравнивание. Такого рода объекты как раз и рассматривает Максвелл.

[8] (К стр. 13). В системе Фуко рычажная передача к дополнительным (не вращающимся) грузам, действующим на муфту,



Фиг. 3.

подобрана так, что при требуемой угловой скорости равнодействующая всех сил, действующих на муфту, равна нулю при любом положении муфты.



Фиг. 4. Дифференциальный регулятор Сименса с переменным вязким трением

[9] (К стр. 13). На фиг. 4 показана схема регулятора, о котором здесь идет речь. Этот регулятор собственно не относится к классу регуляторов II рода (в терминологии Максвелла),

но является астатическим регулятором, близким по своим свойствам к регуляторам II рода.

[10] (К стр. 15). Регулятор Сименса, о котором здесь говорит Максвелл, будет описан подробно далее (см. примечания 25 и 37).

[11] (К стр. 15). См. по этому поводу далее примечание 38.

[12] (К стр. 16). В уравнениях буква B обозначает также приведенную массу тела B относительно оси вращения.

В тексте подлинника в уравнении (4) перед членом Gy ошибочно указан знак $+$.

[13] (К стр. 17). Предполагается, что пружина стремится отжать грузы от кольца. Центробежная сила, преодолевая усилие пружины, прижимает грузы к кольцу.

[14] (К стр. 17). V_1 — это та скорость, при которой грузы регулятора начинают перемещать тело B.

[15] (К стр. 17). Принципиальная схема рассматриваемого регулятора показана на фиг. 1 для случая, когда тело B связано с заслонкой.

[16] (К стр. 18). Максвелл отсчитывает изменение координат не от того равновесия, которое должно установиться в системе, а от того равновесия, которое было до изменения режима работы. Этим объясняется наличие члена Vt в уравнении (11).

[17] (К стр. 18). Левая часть характеристического уравнения равна положительному числу FG при $n=0$; она обращается в $-\infty$ при $n=-\infty$. Следовательно, существует по крайней мере одно отрицательное вещественное значение n, обращающее левую часть характеристического уравнения в нуль.

Неравенство

$$\frac{Y}{B}\left(\frac{F}{M}+\frac{Y}{B}\right)-\frac{G}{B}>0$$

может быть получено с помощью формулы Кардана. Его можно получить также из позднее установленных условий устойчивости Раута—Гурвица для уравнения (12).

[18] (К стр. 19). Максвелл считает изменения угловой скорости при эксперименте настолько малыми, что первый член разложения нелинейной функции в ряд совпадает с усредняющей прямой, определенной экспериментально.

[19] (К стр. 19). В этом разделе исследуется устойчивость прямого регулирования астатическим регулятором машины, имеющей самовыравнивание при учете вязкого трения в регуляторе.

Обозначим через φ — координату, характеризующую положение шаров регулятора, а через $\omega = \dot{\theta}$ — угловую скорость главного вала. Пусть далее $A = A_0 + A_1(\varnothing)$ — суммарный момент инерции главного вала, причем $A_1(\varnothing)$ — момент инерции шаров регулятора, приведенный к главному валу, а $B(\varnothing)$ — момент инерции шаров, приведенный к координате $\varnothing$.

Кинетическая энергия системы

$$T = \frac{1}{2}\{[A_0 + A_1(\varnothing)]\,\omega^2 + B(\varnothing)\,\dot{\varnothing}^2\}.$$

Обозначим через $V(\varnothing)$ потенциальную энергию шаров регулятора. Тогда Лагранжева функция L будет равна:

$$L = T - V = \frac{1}{2}\{[A_0 + A_1(\varnothing)]\,\omega^2 + B(\varnothing)\,\dot{\varnothing}^2\} - V(\varnothing)$$

и, следовательно,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \omega}\right) = \frac{d}{dt}\{[A_0 + A_1(\varnothing)]\,\omega\} = A_0\omega + \omega\,\frac{\partial A_1(\varnothing)}{\partial \varnothing}\,\dot{\varnothing} + A_1(\varnothing)\,\dot{\omega},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varnothing}}\right) = \frac{d}{dt}\,[B(\varnothing)\,\dot{\varnothing}] = B(\varnothing)\,\ddot{\varnothing} + \frac{\partial B}{\partial \dot{\varnothing}}\,\dot{\varnothing}^2.$$

На систему действуют следующие обобщенные силы, не учтенные Лагранжевой функцией: на главный вал (координата θ) действует движущий момент M и момент сопротивления L, на регулятор (координата $\varnothing$) действует сила вязкого трения f.

Будем считать L постоянным.

Момент M, при учете самовыравнивания и влияния заслонки, связанной с муфтой регулятора, является функцией ω и $\varnothing$. Будем считать f функцией только $\dot{\varnothing}$ и притом $f(0) = 0$. Тогда

$$M = M(\omega, \varnothing) \quad \text{и} \quad f = f(\dot{\varnothing}).$$

Уравнения Лагранжа в рассматриваемом случае имеют вид:

уравнение машины

$$[A_0 + A_1(\varnothing)]\,\dot{\omega} + \omega \frac{\partial A_1(\varnothing)}{\partial \varnothing} \dot{\varnothing} = F(\omega_1 \varnothing) + L,$$

уравнение регулятора

$$B(\varnothing)\,\ddot{\varnothing} + \frac{1}{2}\frac{\partial B(\varnothing)}{\partial \varnothing}\dot{\varnothing}^2 - \frac{1}{2}\frac{\partial A_1(\varnothing)}{\partial \varnothing}\omega^2 + \frac{\partial V}{\partial \varnothing} = f(\dot{\varnothing}).$$

Равновесные значения ω_0 и $\varnothing_0$ даются уравнениями

$$F(\omega_0, \varnothing_0) + L = 0 \text{ и } \frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_1(\varnothing)}{\partial \varnothing}\right)_{\varnothing=\varnothing_0}\omega_0^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial \varnothing}\right)_{\varnothing=\varnothing_0} = 0.$$

Предполагая регулятор астатическим, т. е. считая, что

$$V(\varnothing) = A_1(\varnothing)\,\omega_0^2 + \text{const},$$

переходя к приращениям координат

$$\omega = \omega_0 + y, \quad \varnothing = \varnothing_0 + x$$

и линеаризируя задачу, получим линейное приближение уравнений движения:

$$A\ddot{y} + X\dot{y} + K\dot{x} + Gx = 0,$$

$$B\ddot{x} + Y\dot{x} - K\dot{y} = 0,$$

где значения коэффициентов A, B, X, Y, G и K легко находятся в процессе линеаризации задачи.

В уравнении машины член $K\dot{x}$ появился в результате учета влияния изменения координаты $\varnothing$ на приведенный к валу машины момент инерции всех ее частей, движущихся совместно с валом. В случае регулирования машины значение K мало, так как момент инерции масс регулятора, приведенный к валу машины, ничтожно мал по сравнению с моментом инерции самой машины и, прежде всего, ее маховика. Значение K существенно, например, при регулировании скорости вращения в некоторых приборах, у которых момент инерции шаров регулятора может быть сравним с моментом инерции остальных вращающихся масс.

[20] (К стр. 20). Равенство (5) выполняется, например, для параболического центробежного маятника (фиг. 2). Это условие можно рассматривать, например, как общее условие астатичности обычного центробежного регулятора.

[21] (К стр. 21). Или самовыравнивания машины.

[22] (К стр. 23). Для того чтобы уравнение (16) при положительных p, q, r, s и t имело корни только с отрицательной действительной частью, в соответствии с позднее установленными критериями Раута-Гурвица, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} p & r & t & 0 \\ 1 & q & s & 0 \\ 0 & p & r & t \\ 0 & 1 & q & s \end{vmatrix} > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} p_1 & r & t \\ 1 & q & s \\ 0 & p & r \end{vmatrix} > 0 \text{ и } \Delta_3 = \begin{vmatrix} p & r \\ 1 & q \end{vmatrix} > 0.$$

Но

$$\Delta_3 = pq - r, \quad \Delta_2 = r\Delta_3 - p(sp - t)$$

и

$$\Delta_1 = s\Delta_2 - t\,[p(q^2 - s) - (rq - t)].$$

Из этих неравенств сразу видно, что условия Максвелла являются необходимыми. Действительно, если $pq < r$, то $\Delta_3 < 0$. Положим, хотя это почти очевидно, что они не яв-

ляются достаточными. Пусть $pq > r$ и пусть $ps = t$, тогда $\Delta_1 = sr(qp - r) - ps[p(q^2 - s) - (rq - ps)] = -s(pq - r)^2 < 0$.

Из этого неравенства следует, что условия Максвелла $pq > r$ и $ps > t$ недостаточны для устойчивости, так как при изменении разности $ps - t = \varepsilon$ значение $\Delta_1 < 0$, если $\varepsilon = 0$ и, следовательно, в силу непрерывности $\Delta_1 < 0$, если $\varepsilon > 0$, но достаточно мало.

[23] (К стр. 23). Регулятор, о котором идет речь в этом разделе, описан К. Сименсом в работе, упоминаемой Максвеллом*. Ниже приводится перевод части этой работы, в которой впервые излагается изобретенный Сименсом жидкостный регулятор, предназначенный для поддержания постоянства угловой скорости вращения хронографов и астрономических труб.

„...Вращающийся сосуд представляет собой чашу (см. фиг. 3), открытую сверху и снизу, более широкую сверху и сужающуюся книзу по параболической кривой, аналогичной той, которая образуется при вращении жидкости. Эта чаша имеет на своей внутренней поверхности три или четыре радиальных ребра, которые соединены у центрального подшипника, при помощи которого чаша поддерживается на шпинделе S. Эта опора не является неподвижной, так как шпиндель снабжен винтовой нарезкой с большим шагом, по которой ходит подшипник, благодаря наличию внутренней нарезки. Ось связана с чашей C при помощи спиральной пружины E, один конец которой укреплен к свободному концу шпинделя, а другой к чаше. Перед окончательным закреплением пружину предварительно растягивают с таким расчетом, чтобы уравновесить вес чаши, которая потом, если можно так выразиться, „всплывает“ по нарезке оси без оказания на нее какого бы то ни было давления. Верхней опорой шпинделя S

* C. W. Siemens On uniform Rotation, Philosophical Transactions of the Royal Society, 1866, vol. 156, part II, pp. 657—670.

служит подшипник, установленный в верхней крышке цилиндрического сосуда B со стеклянными стенками и стеклянным куполом, который полностью заключает чашу C и позволяет в то же время видеть ее действие. Этот внешний сосуд B наполнен жидкостью настолько, чтобы нижний край чаши был погружен в нее. Вращение жидкости во внешнем сосуде устраняется радиальными ребрами на дне.

На внешней поверхности вращающейся чаши C сделаны два концентрических выступа, один на верхнем краю, другой ближе к поверхности внешней жидкости, с целью отбрасывания жидкости, которая подвержена прилипанию к внешней поверхности чаши, вопреки центробежной силе, и препятствует надлежащей работе чаши.

Если валу и чаше C сообщено вращение часовым механизмом или другим каким-нибудь источником силы, то жидкость на дне чаши под действием центробежной силы поднимается по внутренним стенкам, в то время как дополнительная жидкость будет входить снаружи и поддерживать уровень жидкости близким к тому уровню, который имеется снаружи чаши. В момент, когда вращающаяся жидкость коснется верхнего края чаши, скорость будет определяться формулой:

$$n = \frac{\sqrt{2gh}}{2\pi r},$$

в которой под h следует понимать высоту краев чаши над поверхностью. Практически невозможно предотвратить дальнейшее ускорение, так как сила, необходимая для поддержания скорости чаши после того, как жидкость поднялась до верхнего края, чрезвычайно мала и никаких новых частиц не нужно приводить в движение.

Для того чтобы быть уверенным, что жидкость не опустится ниже края вращающейся чаши, необходимо, чтобы был приложен избыток движущей силы. Однако он не должен быть употреблен для дальнейшего ускорения чаши. Это обеспечивается

непрерывным истечением тонкого слоя жидкости, который наталкивается на стенки внешнего сосуда и падает обратно в жидкость на дне, откуда некоторое количество должно снова проникнуть в чашу, чтобы подняться и перелиться через край.

Мощность, поглощаемая подъемом и выбрасыванием жидкости из чаши, строго пропорциональна количеству жидкости, участвующей в этом движении, т. е. толщине выливающегося слоя, если только скорость постоянна.

Нельзя претендовать на высокую степень точности этого прибора, если не предусмотрено в нем следующее компенсирующее устройство...

Мы до сих пор принимали жесткую связь между чашей и вращающейся осью. В случае, когда нет вытекания через край, это предположение справедливо, так как пружина слишком жестка, чтобы уступить противодействию чаши, когда не производится никакой работы. С увеличением же мощности и сопротивление чаши возрастает и происходит переливание жидкости через край.

Соединительная пружина E должна теперь уступить соразмерно созданному таким образом крутящему моменту сил сопротивления, и чаша будет опускаться по нарезке винта, который служит для нее направляющей. С одной стороны, величина h, входящая в нашу формулу, увеличивается с истечением; она (высота) уменьшается в том же отношении при опускании чаши; оба изменения прямо зависят от движущей силы.

Когда жесткость и длина пружины подобраны так, что одно действие равно другому для заданного увеличения мощности, то это равенство должно соблюдаться также для других значений увеличения мощности, лежащих в разумных пределах, и в результате должно иметь место точно равномерное вращение. „Разумные пределы“ этого автоматического регулирования определяются величиной отверстия, через которое жидкость может проникать в чашу, а также диапазоном действия пружины, к которому применим закон Мариотта. Эксперименты показа-

ли, что движущая сила может варьироваться в широких пределах без сколько-нибудь заметного изменения скорости.

Окончательная регулировка прибора для установки нормальной скорости достигается просто поднятием или опусканием чаши во время вращения, для чего нижний конец оси S поддерживается регулирующим винтом..."

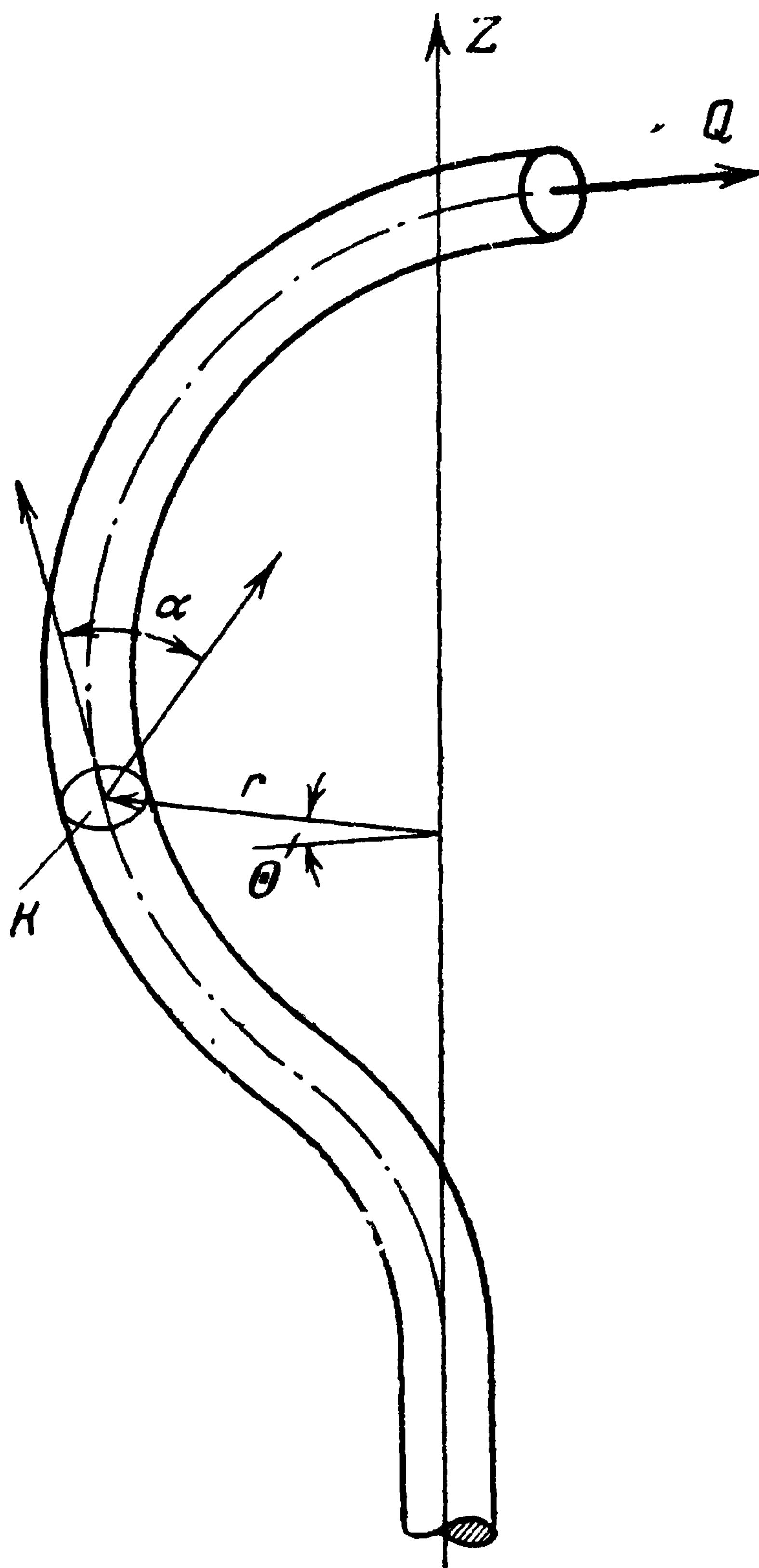
Принцип действия описанного К. В. Сименсом приспособления для обеспечения астатизма регулятора можно пояснить следующим образом.

При вращении чаши регулятор работает как центробежный насос: жидкость со дна чаши под действием центробежных сил поднимается вдоль по стенкам чаши вверх и переливается через край. Энергия жидкости при этом увеличивается за счет действия чаши на жидкость. Следовательно, жидкость, при перемещении вверх по чаше, создает реактивный момент, направленный против вращения чаши.

Если бы чаша была жестко укреплена непосредственно на валу, то этот момент передавался бы механизму, вращающему вал. В описанной конструкции вал имеет винтовую нарезку, и гайка, навернутая на эту нарезку, соединена с чашей. Поэтому под действием реактивного момента, приложенного к чаше со стороны жидкости, чаша поворачивается и одновременно опускается по резьбе вниз. При этом растягивается пружина, соединяющая вал с чашей, и она опускается по винтовой нарезке до тех пор, пока усилие пружины не уравновесит реактивный момент жидкости.

Пусть при некоторой угловой скорости ω поддерживался равновесный режим, причем расход жидкости, перекачиваемой чашей, был равен Q. Если теперь увеличить момент, вращающий вал, то угловая скорость чаши начнет возрастать, и новое равновесие наступит при расходе Q' ($Q'>Q$). Если бы чаша было жестко соединена с валом, то новое равновесное значение угловой скорости ω' было бы больше ω. Но при расходе Q' реактивный момент жидкости на чашу больше, чем

при расходе Q, и чаша по винтовой нарезке опускается вниз. При этом равновесное значение ω' должно уменьшиться, так как понижается высота h, на которую поднимается столб жидкости.



Фиг. 5. К расчету движения вращающейся жидкости

Об условиях обеспечения астатизма см. далее.

[24] (К стр. 23). Направление осей r, Θ, Z показано на фиг. 5.

Рассечем трубку двумя параллельными плоскостями, отстоящими друг от друга по длине трубки на расстоянии ds, выделив, таким образом, массу жидкости $\rho k ds$ (ρ — плотность жидкости, k — сечение). Центр тяжести этого элемента массы расположен на расстоянии r от оси вращения. Пренебрегая диаметром трубки по сравнению с r, получим элементарный момент — момент количества движения этой массы, проистекающий от переносного движения, т. е. от ее вращения вместе с трубкой:

$$(\rho k ds)\, r \left(r \frac{d\varnothing}{dt}\right) = \rho k r^2 ds \frac{d\varnothing}{dt}.$$

Интегрируя это выражение вдоль трубки, определим указанный момент количества движения всей массы жидкости

$$A \frac{d\varnothing}{dt}, \qquad \text{где } A = \int_s \rho k r^2 ds.$$

Проекция на тангенциальное направление момента количества движения частицы жидкости, обусловленного ее относительным движением вдоль трубки, равна

$$\rho r d\theta k v r = \rho r^2 k v d\theta,$$

где v — скорость рассматриваемой частицы массы относительно трубки, а $r d\theta$ — проекция ds на тангенциальное направление. Поэтому проекция указанного выше момента количества движения всей массы жидкости в трубке равна

$$\int_s \rho r^2 k v d\theta = QB,$$

где

$$B = \int_s \rho r^2 d\theta.$$

Проекция суммарного момента количества движения всей жидкости, находящейся в трубке, равна

$$A \frac{d\varnothing}{dt} + BQ.$$

[25] (К стр. 23). Скорость жидкости, выбрасываемой из конца трубки, складывается из скорости, зависящей от переносного движения $r \frac{d\varnothing}{dt}$, и из скорости, зависящей от расхода, равной $\frac{Q}{K}$ и направленной под углом α к направлению переносного движения. Поэтому соответствующая проекция момента количества движения жидкости равняется

$$\left(r \frac{d\varnothing}{dt} + \frac{Q}{K} \cos\alpha\right) r \rho Q.$$

[26] (К стр. 24). Напомним, что r — расстояние от оси вращения до центра сечения верхнего выходного отверстия трубки.

[27] (К стр. 24). Если $\bar{v}$ — вектор абсолютной скорости жидкости, $\bar{v}_r$ — вектор относительной ее скорости по трубке и $\bar{v}_\tau$ — вектор переносной скорости трубки, то

$$\bar{v}^2 = (\bar{v}_r + \bar{v}_\tau)^2 = v_r^2 + 2v_r v_\tau \cos\alpha' + v_\tau^3,$$

где α' — угол между направлением относительной скорости жидкости и касательной к траектории соответствующей точки трубки.

Энергия частицы жидкости

$$dw = \frac{1}{2} v^2 \rho k ds$$

и, следовательно, энергия всей жидкости в трубке

$$w = \frac{1}{2}\int (v_r^2 + 2v_r v_\tau \cos\alpha' + v_\tau^2)\,\rho k ds =$$

$$= \frac{1}{2}\int \left[v_r^2 + 2v_r v_\tau \cos\alpha' + r^2\left(\frac{\partial\varnothing}{\partial t}\right)^2\right]\rho k ds =$$

$$= \frac{1}{2} C Q^2 + B Q \frac{d\varnothing}{dt} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varnothing}{\partial t}\right)^2,$$

так как $ds\cos\alpha' = rd\Theta$.

[28] (К стр. 24). Здесь, как и ранее, L — момент, вращающий шпиндель регулятора.

[29] (К стр. 24). Дифференцируя (4), получим:

$$\frac{dW}{dt} = A\frac{d\varnothing}{dt}\frac{d^2\varnothing}{dt^2} + B\frac{dQ}{dt}\frac{d\varnothing}{dt} + BQ\frac{d^2\varnothing}{dt^2} + CQ\frac{dQ}{dt}.$$

Поэтому, учитывая (5),

$$\left(\frac{dW}{dt} + \frac{dW}{dt}\right) = A\frac{d\varnothing}{dt}\frac{d^2\varnothing}{dt^2} + B\frac{d\theta}{dt}\frac{d\varnothing}{dt} + BQ\frac{d^2\varnothing}{dt^2} + CQ\frac{dQ}{dt} +$$

$$+ \rho g Q(h+z) + \frac{1}{2}\rho r^2 Q\left(\frac{d\varnothing}{dt}\right)^2 + \rho\frac{r}{k}\cos\alpha\, Q^2\frac{2d\varnothing}{dt} + \frac{1}{2}\frac{\rho}{k^2}Q^3.$$

Приравнивая полученное выражение для изменения энергии в единицу времени, соответствующей работе внешнего момента, находим:

$$L\frac{d\varnothing}{dt}=\frac{dW}{dt}+\frac{dW'}{dt}$$

или

$$L\frac{d\varnothing}{dt}=A\frac{d\varnothing}{dt}\frac{d^2\varnothing}{dt^2}+B\frac{dQ}{dt}\frac{d\varnothing}{dt}+BQ\frac{d^2\varnothing}{dt^2}+CQ\frac{dQ}{dt}+$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\rho}{k^2}Q^3+\frac{1}{2}\rho r^2Q\left(\frac{d\varnothing}{dt}\right)^2-\frac{1}{2}\rho r^2Q\frac{d\varnothing}{dt}.$$

Это равенство и уравнение (6) могут быть сведены к следующим двум уравнениям:

$$A\frac{d^2\varnothing}{dt^2}+B\frac{dQ}{dt}+\rho r^2Q\frac{d\varnothing}{dt}+\rho\frac{r}{k}\cos\alpha Q^2=L;$$

$$B\frac{d^2\varnothing}{dt^2}+C\frac{dQ}{dt}+\frac{1}{2}\frac{\rho}{k^2}Q^2+\rho g(h+z)-\frac{1}{2}\rho r^2\left(\frac{d\varnothing}{dt}\right)^2=0.$$

[30] (К стр. 25). Имеется в виду уравнение (7).

[31] (К стр. 25). Скорость предлагается постоянной, поэтому

$$\frac{d^2\varnothing}{dt^2}=0.$$

[32] (К стр. 26). Таким приспособлением является описанная выше (см. примечание 23) установка чаши на винтовой нарезке вала.

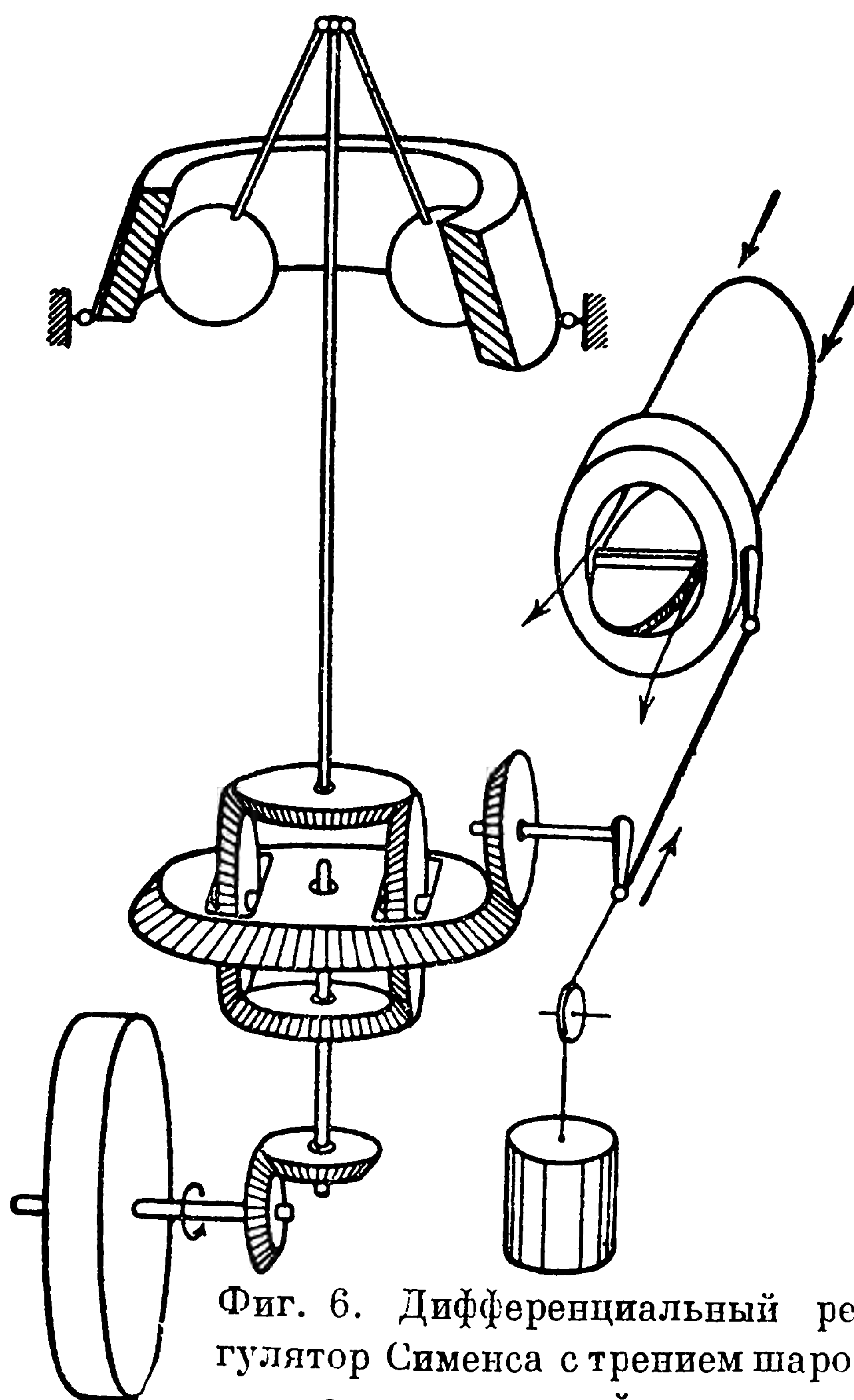
[33] (К стр. 26). При сделанных предположениях это условие является необходимым для того, чтобы регулятор был астатическим.

[34] (К стр. 27). В регуляторе Сименса, в соответствии с конструкцией чаши, $\cos\alpha=0$ и $B=0$. Кроме того, благодаря креплению чаши на винтовой нарезке обеспечивается выпол-

нение равенства $L = -sz$. Поэтому уравнения (7) и (8) применительно к регулятору Сименса имеют вид:

$$A\frac{d^2\varnothing}{dt^2} + \rho r^2 Q\frac{d\varnothing}{dt} = -sz, \tag{7'}$$

$$C\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{2}\frac{\rho}{k^2}Q^2 + \rho g(h+z) - \frac{1}{2}\rho r^2\left(\frac{d\varnothing}{dt}\right)^2 = 0. \tag{8'}$$



Фиг. 6. Дифференциальный регулятор Сименса с трением шаров о неподвижный конус

[35] (К стр. 27). Максвелл имеет здесь в виду регулятор Сименса с дифференциальной передачей.



Фиг. 7.

Примеры таких регуляторов показаны на фиг. 6 и 7.

Дифференциальные регуляторы, которые здесь рассматривает Максвелл, хотя и являются астатическими, но не относятся все же к какому-либо из трех перечисленных выше родов астатических регуляторов (см. примечание 8).

[36] (К стр. 27). На фиг. 8 показана схема дифференциальной передачи дифференциального регулятора Сименса. На схеме указаны углы ξ, η, $\varnothing$ и ϑ.

[37] (К стр. 29). Рассмотрим систему, показанную на фиг. 8.

ϑ — угол поворота главного вала;

$\varnothing$ — угол поворота вала регулятора;

η — угол поворота водила сателлитов (угол поворота оси сателлита в плоскости, перпендикулярной к валу регулятора);

ξ — угол поворота сателлита вокруг его оси;

$\Theta = P(\eta) - R$ — результирующий момент, действующий на дифференциал со стороны главного вала, т. е. обобщенная сила по координате ϑ;

Φ — момент, действующий на дифференциал со стороны регулятора, т. е. обобщенная сила по координате $\varnothing$;

H — постоянный момент, действующий на водило, т. е. обобщенная сила по координате η; значением H определяется установившееся значение угловой скорости машины;

Ξ — момент трения, действующий на сателлит при его вращении вокруг собственной оси, т. е. обобщенная сила по координате ξ.

Система имеет две степени свободы.

Если выбрать в качестве обобщенных координат ϑ и $\varnothing$, то кинетическая энергия системы будет иметь вид:

$$T = \frac{L'}{2}\dot{\vartheta}^2 + M'\dot{\vartheta}\dot{\varnothing} + \frac{N'}{2}\dot{\varnothing}^2.$$

Значения коэффициентов L', M', N' можно определить следующим образом. Пусть A, B, C и D — заданные моменты

инерции движущихся деталей, соответственно характеризуемые координатами u, ϑ, $\varnothing$, η и ξ, так что

$$T=\frac{A}{2}\dot{\vartheta}^2+\frac{B}{2}\dot{\varnothing}^2+\frac{C}{2}\dot{\eta}^2+\frac{D}{2}\dot{\xi}^2,$$

и пусть далее P, Q, R и S — зависящие от передаточных отношений постоянные числа, связывающие угловые скорости так, что

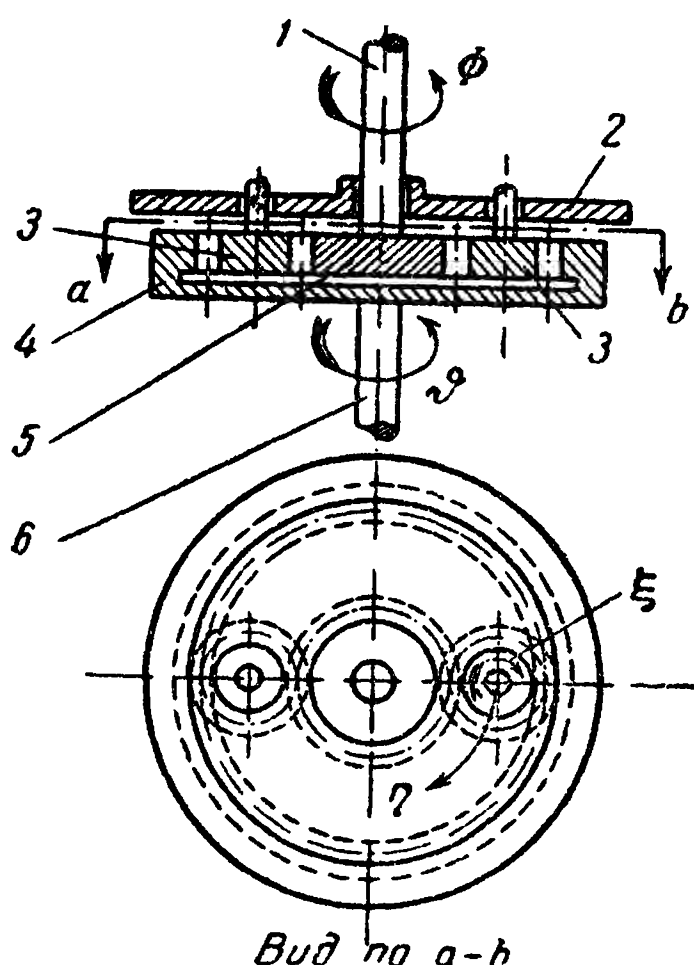
$$\dot{\xi}=P\dot{\vartheta}+Q\dot{\varnothing},\quad \dot{\eta}=R\dot{\vartheta}+S\dot{\varnothing}.$$

Тогда

$$T=\frac{A\dot{\vartheta}^2}{2}+\frac{B}{2}\dot{\varnothing}^2+\frac{C}{2}(R^2\dot{\vartheta}^2+2RS\dot{\vartheta}\dot{\varnothing}+S^2\dot{\varnothing}^2)+\frac{D}{2}(P^2\dot{\vartheta}^2+2PQ\dot{\vartheta}\dot{\varnothing}+Q^2\dot{\varnothing}^2)$$

или

$$T=\frac{1}{2}(A+CR^2+DP^2)\dot{\vartheta}^2+\frac{1}{2}(B+CS^2+DQ^2)\dot{\varnothing}^2+(CRS+DPQ)\dot{\vartheta}\dot{\varnothing},$$



Фиг. 8. Дифференциальная передача регулятора Сименса:
1 — вал, соединенный с чашей регулятора; 2 — водило сателлитов, соединенное с заслонкой машины; 3 — сателлит; 4 — эпициклическая шестерня; 5 — солнечная шестерня; 6 — вал, соединенный с машиной.

и, следовательно,

$$L'=A+CR^2+DP^2,$$
$$M'=CRS+DPQ,$$
$$N'=B+CS^2+DQ^2.$$

Если принять далее в качестве обобщенных координат ξ и η и записать

$$T = \frac{L}{2}\dot{\xi}^2 + M\dot{\xi}\dot{\eta} + \frac{N}{2}\dot{\eta}^2,$$

выразить L, M и N через A, B, C, D, P, Q, R и S аналогично тому, как это сделано выше для L', M' и N', и сравнить затем выражения, полученные для L, M и N, с соответствующими выражениями для L', M' и N', то получатся указанные Максвеллом равенства (11):

$$\left.\begin{aligned} L' &= LP^2 + 2MPR + NR^2, \\ M' &= LPQ + M(PS + QR) + LNS, \\ N' &= LQ^2 + 2MQS + NS^2. \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Сумма обобщенных сил, приведенных к координате ϑ, равна $\Theta + P\Xi + Q\mathrm{H}$, а сумма обобщенных сил, приведенных к координате $\varnothing$, равна $\Phi + R\Xi + S\mathrm{H}$.

Заметив, что $\frac{\partial T}{\partial\dot{\vartheta}} = L'\dot{\vartheta} + M'\dot{\varnothing}$ и что $\frac{\partial T}{\partial\dot{\varnothing}} = N'\dot{\varnothing} + M'\dot{\vartheta}$,

и воспользовавшись второй формой уравнений Лагранжа, получим уравнения (12)

$$\left.\begin{aligned} L'\ddot{\vartheta} + M'\ddot{\varnothing} &= \Theta + P\Xi + Q\mathrm{H}, \\ N'\ddot{\varnothing} + M'\ddot{\vartheta} &= \Phi + P\Xi + S\mathrm{H}. \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

[38] (К стр. 29). Пусть $M = 0$ и $LPQ + NRS = 0$. Тогда $M' = 0$, и уравнения движения имеют вид

$$\left.\begin{aligned} L'\ddot{\vartheta} &= \Theta + P\Xi + Q\mathrm{H}, \\ N'\ddot{\varnothing} &= \Phi + R\Xi + S\mathrm{H}. \end{aligned}\right\}$$

Крутящий момент машины Θ зависит только от η и $\dot{\vartheta}$:

$$\Theta = \Theta(\eta, \dot{\vartheta}).$$

Примем, что момент Φ, приложенный к валу регулятора, зависит только от $\dot{\varnothing}$, как это имеет место, например, в регуляторе фиг. 6.

$$\Phi = \Phi(\dot{\varnothing}).$$

К сателлиту приложен только момент трения в оси Ξ, который может быть принят постоянным ($\Xi = \mathrm{const}$) или зависящим только от $\dot{\xi}$. В последнем случае

$$\Xi = \Xi(\dot{\vartheta}, \dot{\varnothing}).$$

Фиг. 9. Схема сил, действующих на сателлит

Момент H, приложенный к водилу сателлитов, либо постоянен, $\mathrm{H} = \mathrm{const}$, либо же зависит от $\eta\,[\mathrm{H} = \mathrm{H}(\vartheta, \varnothing)]$.

Таким образом, при $M' = 0$ уравнения движения в общем случае имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} L'\ddot{\vartheta} &= \Theta(\eta, \dot{\vartheta}) + P\,\Xi(\dot{\vartheta}, \dot{\varnothing}) + Q\mathrm{H}(\vartheta, \varnothing), \\ N'\ddot{\varnothing} &= \Phi(\dot{\varnothing}) + R\,\Xi(\dot{\vartheta}, \dot{\varnothing}) + S\mathrm{H}(\vartheta, \varnothing). \end{aligned}\right\} \quad (A)$$

Если предположить, что $\Xi = \text{const}$ и $\text{H} = \text{const}$, то в последнее уравнение не войдет ϑ. В этом случае в любой момент времени значение $\varnothing$ не будет зависеть от момента, развиваемого двигателем Θ, и не будет изменяться при изменении нагрузки на машину.

В состоянии равновесия $\ddot{\varnothing} = 0$,

$$\Phi(\dot{\varnothing}_0) + R\,\Xi + S\text{H} = 0. \tag{Б}$$

Если $\dot{\varnothing} = \dot{\varnothing}_0 + x$ и если разложить $\Phi(\dot{\varnothing})$ в ряд по степеням x, ограничиться линейными членами разложения и учесть уравнение (Б), то уравнение A дает:

$$N\dot{x} + kx = 0,$$

где k — положительное число.

Таким образом угловая скорость вала регулятора в малых колебаниях апериодически устойчива.



КОММЕНТАРИИ
К РАБОТАМ И. А. ВЫШНЕГРАДСКОГО „ОБ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ РЕГУЛЯТОРОВ“ И „О РЕГУЛЯТОРАХ ПРЯМОГО ДЕЙСТВИЯ“

[1] (К стр. 39). В этой фразе наиболее четко выражена мысль Вышнеградского, связанная с влиянием сил сухого (кулоновского) трения на процесс регулирования. Кулоновское трение *может* стабилизировать процесс, но только ценой ухудшения чувствительности регулятора.

[2] (К стр. 45). Это краткое замечание Вышнеградского относится к его занятиям по регуляторам непрямого действия. Этим регуляторам посвящена вторая работа Вышнеградского, в которой рассматривается одна из нелинейных задач теории регулирования. Эта вторая работа Вышнеградского будет помещена в томе серии „Классики науки“, посвященной нелинейным задачам регулирования.

[3] (К стр. 45). Эти три предположения, наряду с предположением о пренебрежении сухим трением, позволившие линеаризировать задачу, являются наиболее существенными.

[4] (К стр. 47). Здесь Вышнеградский ставит задачу о поведении связанной системы машина — регулятор после мгновенного изменения нагрузки. В такой постановке эта задача является основной почти для всех последующих работ по теории регулирования, включая и значительную часть работ последних лет.

[5] (К стр. 50). Из этого обозначения ясно, что под *вредными сопротивлениями* Вышнеградский понимает действующую на

муфту силу кулоновского трения, постоянную по величине, но направленную всегда против движения муфты.

[6] (К стр. 50). Это замечание исчерпывающе доказывает, что Вышнеградский *сознательно пренебрегает силами сухого трения, заранее это оговаривая.* Даже одна эта фраза достаточна для разоблачения легенды об „ошибке Вышнеградского" (см. статью А. Андронова .и И. Вознесенского, стр. 253).

[7] (К стр. 52). Позже был введен в употребление термин *коэффициент нечувствительности*, сохранившийся до наших дней.

Коэффициентом нечувствительности называется отношение $\frac{\omega_0 - \omega'}{\omega_0}$, где ω_0 — значение угловой скорости, при которой муфта регулятора находится в равновесии при пренебрежении силами сухого трения, а ω' — угловая скорость, при которой муфта регулятора начинает движение при учете сил сухого трения ($\omega' < \omega_0$).

В обозначении Вышнеградского

$$\frac{\omega_0 - \omega'}{\omega_0} = \frac{R' + R''}{Kg}.$$

Таким образом, коэффициент нечувствительности является обратной величиной *меры чувствительности* регулятора, по Вышнеградскому.

[8] (К стр. 54). По точному смыслу слов, сказанных в п. 4 до дифференцирования уравнения (2), Вышнеградский отбрасывает в нем член $-\lambda(R' + R'')$, так как именно он выражает, по терминологии Вышнеградского, „вредные сопротивления регулятора и регулирующего прибора".

Здесь же уместно заметить, что в некоторых случаях сила, пропорциональная скорости муфты, может учитывать также часть сил сухого трения. С этим приходится сталкиваться в тех случаях, когда возможна передача на регулятор вибраций машины, или же тогда, когда нормальное давление

на трущиеся поверхности само зависит от скорости движения шаров регулятора (например, если оно обусловлено кориолисовыми силами инерции).

Таким образом, *поставив* нелинейную задачу об исследовании переходного процесса при учете сил сухого трения, Вышнеградский перешел к решению более простой линейной задачи, опустив с этой целью члены, учитывающие кулоновское трение в уравнении процесса.

[9] (К стр. 54). Уравнение (5) содержит в правой части постоянную величину, не равную нулю в связи с тем, что Вышнеградский отсчитывает переменные от тех их значений, которые соответствуют равновесному режиму, имевшему место *до изменения нагрузки.*

Позднее было принято отсчитывать координаты от того положения равновесия, которое соответствует *новой* нагрузке. При этом в уравнении процесса правая часть равна нулю.

Уравнения Вышнеградского

$$I\frac{d\omega}{dt}=(p-Q)\rho-Lu,$$

$$\frac{d^2u}{dt^2}+M\frac{du}{dt}+Nu=Kg\frac{\omega-\omega_0}{\omega_0}$$

в новых переменных и после введения так называемых постоянных времени T и коэффициента неравномерности δ, получают вид:

$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{\eta}{T_\alpha},$$

$$T_r^2\eta''+T_k\eta'+\delta\eta=-\varphi,$$

где φ — относительное отклонение числа оборотов машины;

η — относительное отклонение муфты регулятора;

δ — коэффициент неравномерности;

T_α, T_r и T_k — времена машины, регулятора и катаракта.

В такой форме, отличающейся от уравнений Вышнеградского лишь обозначениями, уравнения эти вошли во многие последующие работы.

В работах по электрическим регуляторам пользуются также такими обозначениями:

$$T_1 \frac{dx_1}{dt} = - k_1 x_2,$$

$$T_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} + T_2' \frac{dx_2}{dt} + x_2 = k_2 x_1,$$

где x_1 и x_2 — относительные отклонения координат; T_1, T_2, T'_2 — соответствующие постоянные времени; k_1 и k_2—так называемые коэффициенты усиления машины и регулятора.

[10] (К стр. 54). Во втором мемуаре* Вышнеградский выводит это уравнение 4-го порядка. Однако в этом случае одно линейное дифференциальное уравнение 4-го порядка справедливо лишь для определенных интервалов движения, которые чередуются с интервалами, для которых справедливо *другое* линейное дифференциальное уравнение 4-го порядка. Таким образом, во втором мемуаре Вышнеградскому приходится иметь дело со сложной *нелинейной* задачей.

[11] (К стр. 55). Некоторые термины, которыми здесь пользуется Вышнеградский („подвижность регулятора", „сила действия регулятора", „быстрота действия регулятора"), в настоящее время вышли из употребления.

[12] (К стр. 55). При скорости муфты, равной $1 \frac{\text{см}}{\text{сек}}$, M равно отношению силы, приложенной к муфте со стороны катаракта, к приведенной массе регулятора.

[13] (К стр. 56). Утверждая, что N является мерой устойчивости регулятора, Вышнеградский имеет в виду так называ-

* И. А. Вышнеградский. „О регуляторах непрямого действия". Известия СПБ Практического Технологического Института, 1878 г., стр. 1—48.

емую статическую устойчивость регулятора, рассматриваемого при *заданной* угловой скорости и при отсоединенном катаракте. Следует отметить, что при таком рассмотрении N равняется квадрату собственной частоты малых колебаний регулятора вокруг относительного равновесия.

[14] (К стр. 57). По современной терминологии — комплексные сопряженные корни.

[15] (К стр. 60). Положим в уравнении

$$\varphi^3 + x\varphi^2 + y\varphi + 1 = 0, \qquad (10)$$

$$\varphi = \psi + \frac{x}{3}.$$

Тогда

$$\psi^3 + p\psi + q = 0,$$

где

$$p = y - \frac{1}{3}x^2,$$

$$q = \frac{2}{27}x^3 - \frac{1}{3}xy + 1.$$

По формуле Кардана корни этого уравнения равны

$$\psi = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Все три корня действительны, если

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0.$$

Подставляя значения q и p после простых преобразований, находим условие Вышнеградского

$$y^2x^2 - 4(y^3 + x^3) + 18xy - 27 > 0.$$

[16] (К стр. 61). График, представленный на чертеже, вошел в литературу и получил наименование „диаграммы Вышнеградского“, которая перешла во многие работы, курсы и учебники *.

После Вышнеградского подобные диаграммы в связи с исследованием корней алгебраических уравнений геометрическим методом ввел в широкое употребление Ф. Клейн **.

[17] (К стр. 64). Имеется в виду машина, лишенная самовыравнивания.

[18] (К стр. 65). В этом тексте, выделенном Вышнеградским курсивом, содержится формулировка тех результатов, которые стали потом знаменитыми, получили наименование „тезисов Вышнеградского“, вошли во все курсы и упоминаются во многих работах. Эти тезисы явились, по существу, первыми научными результатами, полученными динамической теорией регулирования, имевшими значение для инженерной практики. Они сохранили свое значение в теории регулирования до наших дней (подробнее см. статью А. Андронова и И. Вознесенского).

[19] (К стр. 66). Если бы линейные дифференциальные уравнения описывали движения при *любых* отклонениях, то вывод об устойчивости (или неустойчивости) движения был бы верен также для любого отклонения. При неустойчивости регулируемого равновесия размахи регулятора могут ограничиваться благодаря влиянию нелинейностей характеристик. Комментируемая фраза Вышнеградского свидетельствует о том, что он отчетливо понимал беспомощность линейного анализа в изучении этого явления.

---

* См. например, G. Krall. Meccanica Technica delle Vibrazione, Bologna, Zanichelli, 1940.

Schmidt. Unmittelbare Regelung. Berlin, 1939.

** F. Klein. Geometrisches zur Abzählung der Wurzeln algebraisches Gleichungen, статья в сборнике: W. Dyck. Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente, München, 1892. См. также F. Klein. Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus, 1913.

[20] (К стр. 67). Здесь Вышнеградский вновь говорит о том, что силами сухого трения он пренебрег и что ценой ухудшения чувствительности регулятора *можно обеспечить устойчивость и без катаракта.*

[21] (К стр. 69). Приведенное Вышнеградским утверждение верно, но доказательство, излагаемое в тексте, неточно.

[22] (К стр. 71). Утверждение это неточно. Даже с точки зрения эксплоатации катаракт может вредить действию регулятора, делая его чувствительным к изменению температуры, в связи с тем, что при изменении температуры существенно изменяется вязкость масла в катаракте.

[23] (К стр. 71). Речь идет о незначительной *статической* устойчивости регулятора, т. е. на современном языке о его малом коэффициенте неравномерности.

[24] (К стр. 71). Регулятор Портера является одной из многочисленных разновидностей регулятора Уатта. Этот регулятор принципиально не отличается от регулятора Уатта; вся развитая Вышнеградским теория прямого регулирования непосредственно относится и к этому регулятору, как, впрочем, и к любому из многочисленных разновидностей регуляторов Уатта. Здесь же уместно отметить, что вся эта теория целиком распространяется на регуляторы прямого действия, работающие по принципу регулятора Уатта, но конструктивно существенно отличающиеся от него, а при естественном обобщении этой теории, связанной с учетом самовыравнивания в регулируемом объекте, она обобщается почти на все регуляторы прямого действия.

[25] (К стр. 77). Разбор этого примера еще раз свидетельствует о том, что Вышнеградский в своем анализе просто пренебрегает силами сухого трения в регуляторе.

[26] (К стр. 83). Работа И. А. Вышнеградского „О регуляторах прямого действия“ имеет неправильную нумерацию параграфов: после § 17 идет сразу § 20, а за ним последний § 21, так что § 18 и 19 *в работе отсутствуют.* Выражение для N, о ко-

тором говорится в тексте, находится в § 15. Отметим, что немецкий вариант этой же работы имеет правильную нумерацию всех 19 параграфов, причем § 14 немецкого варианта, содержащий интересные научные результаты, *отсутствует* в русском варианте (см. „Дополнение" к комментируемой работе). В настоящем издании сохранена нумерация параграфов русского варианта.

[27] (К стр. 86). Указанная здесь последовательность действий до сих пор используется при расчете центробежных регуляторов в установках подобного типа.

[28] (К стр. 87). В этом тезисе существенно подчеркивание Вышнеградским, что речь идет о *чувствительном* регуляторе, т. е. о таком регуляторе, в котором нельзя допустить сколько-нибудь значительных сил сухого трения.

[29] (К стр. 87). Этот тезис Вышнеградского верен лишь применительно к машинам, лишенным самовыравнивания, и к астатическим регуляторам прямого действия.



КОММЕНТАРИИ К ДОПОЛНИТЕЛЬНОМУ ПАРАГРАФУ РАБОТЫ И. А. ВЫШНЕГРАДСКОГО „О РЕГУЛЯТОРАХ ПРЯМОГО ДЕЙСТВИЯ"

[1] (К стр. 91). Сличение текстов немецкого перевода работы Вышнеградского* „О регуляторах прямого действия" и русского оригинала этой работы показало, что в немецком переводе Вышнеградский включил в свою работу дополнительный параграф, содержащий исследование условий, при которых переходный процесс в рассматриваемой им системе прямого регулирования не сопровождается колебаниями. Этот параграф помещается здесь в виде дополнения к работе Вышнеградского „О регуляторах прямого действия".

[2] (К стр. 91). Вышнеградский здесь пользуется теми же обозначениями", как и в русском варианте работы „О регуляторах прямого действия". Существенно, что, выписывая эту систему уравнений, Вышнеградский не вводит в них силы кулоновского трения, в согласии с тем, что им было сказано в § 4 работы „О регуляторах прямого действия" (см. Комментарии, п. 6). Таким образом, текст дополнения еще раз и в абсолютно убедительной форме опровергает легенду об „ошибке" Вышнеградского.

[3] (К стр. 92). Произвольные постоянные C, D и E, входящие в интеграл

---

* Civilingenieur, 1877, XXIII, стр. 96 — 132.

$$\omega - \omega_0 = \omega_0 \frac{N}{K} \frac{(p - Q)}{Lg} \rho + Ce^{0't} + e^{\alpha t} (D \cos \beta t + E \sin \beta t),$$

Вышнеградский определяет из начальных условий:
при $t = 0$

$$\omega - \omega_0 = 0, \quad \frac{d(\omega - \omega_0)}{dt} = \frac{(p - Q)}{I} \rho, \quad \frac{d^2(\omega - \omega_0)}{dt^2} = 0.$$

Эти начальные условия связаны с принятой Вышнеградским схематизацией процесса регулирования и с выбранной им системой отсчета. При $t = 0$ нагрузка внезапно изменяется с величины $p\rho$ до величины $Q\rho$ и в течение всего дальнейшего процесса остается постоянной. В начальный момент угловая скорость ω равна ω_0, т. е. той угловой скорости, которая была до изменения нагрузки. В этот момент u и $\frac{du}{dt}$ равны нулю, так как муфта регулятора занимает положение, соответствующее старому равновесию, и в момент изменения нагрузки еще неподвижна. Поэтому из уравнения движения машины для $t = 0$ получаем:

$$\frac{d(\omega - \omega_0)}{dt} = \frac{(p - Q)}{I} \rho.$$

Если продифференцировать уравнение машины для $t \neq 0$

$$I \frac{d^2(\omega - \omega_0)}{dt^2} = -L \frac{du}{dt}$$

и учесть, что при $t = 0$ величина $\frac{du}{dt} = 0$, то получим для $t = 0$

$$\frac{d^2(\omega - \omega_0)}{dt^2} = 0.$$

Используя эти начальные условия, мы получаем выражения для произвольных постоянных C, D и E, приведенные Выш-

неградским, которые мы здесь перепишем в несколько другом виде:*) $C = \xi C_0$, $D = \xi D_0$, $E = \xi E_0$,

где
$$\xi = \frac{(p - Q)\rho}{I\theta'} \frac{\theta'^2}{\alpha^2 + \beta^2} \frac{1}{(\theta' - \alpha)^2 + \beta^2},$$

$$C_0 = \frac{(\alpha^2 + \beta^2)^2}{\theta'^2}, \quad D_0 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha(\theta' - 2\alpha).$$

$$E_0 = \frac{1}{\beta}[(\beta^2 - \alpha^2)(\theta' - \alpha) - 2\alpha\beta^2].$$

Продифференцируем теперь приведенное в начале этого примечания выражение для $\omega - \omega_0$. Получим:

$$\frac{d\omega}{dt} = \theta' C e^{\theta' t} + \alpha e^{\alpha t}[D\cos\beta t + E\sin\beta t] + \beta e^{\alpha t}[-D\sin\beta t + E\cos\beta t].$$

Приравнивая $\frac{d\omega}{dt} = 0$, получаем следующее трансцендентное уравнение для определения значений t, при которых $\omega - \omega_0$ имеет экстремумы

$$-\theta' C e^{(\theta' - \alpha)t} = (\alpha D + \beta E)\cos\beta t + (\alpha E - \beta D)\sin\beta t.$$

Подставляя введенные выше выражения для C, D и E и сокращая на ξ, находим:

$$-\theta' C_0 e^{(\theta' - \alpha)t} = (\alpha D_0 + \beta E_0)\cos\beta t + (\alpha E_0 - \beta D_0)\sin\beta t,$$

откуда после подстановки выражений для C_0, D_0 и E_0 и элементарных преобразований получаем уравнение:

$$\frac{(\alpha^2 + \beta^2)}{\theta'} e^{(\theta' - \alpha)t} = (\theta' - 2\alpha)\cos\beta t - \frac{[\beta^2 + \alpha(\theta' - \alpha)]}{\beta}\sin\beta t.$$

---

*) При этом учтено, что $-\frac{K_g L}{I\omega_0} = \theta'(\alpha + i\beta)(\alpha - i\beta) = \theta'(\alpha^2 + \beta^2)$

$$N = \theta'(\alpha + i\beta) + \theta'(\alpha - i\beta) + (\alpha + i\beta)(\alpha - i\beta) = 2\alpha\theta' + \alpha^2 + \beta^2$$

и, следовательно, $I\omega_0 \frac{N}{K_g L} = -\frac{2\alpha\theta' + \alpha^2 + \beta^2}{\theta'(\alpha^2 + \beta^2)}$.

[4] (К стр. 93). Рассмотрим в полярной системе координат (полярный угол $\varphi = \beta t$) две кривые

$$r = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{|\theta'|} e^{\frac{(\theta' - \alpha)}{\beta} \varphi}$$

и

$$r = (\theta' - 2\alpha) \cos\varphi - \frac{[\beta^2 + \alpha(\theta' - \alpha)]}{\beta} \sin\varphi.$$

Первая кривая является логарифмической спиралью. Ее радиус-вектор растет с увеличением угла φ, если $\theta' - \alpha > 0$, и убывает с ростом φ, если $\theta' - \alpha < 0$.

Чтобы выяснить характер второй кривой, удобно временно перейти к декартовым координатам, полагая

$$x = R\cos\varphi \text{ и } y = R\sin\varphi.$$

Обозначая, для сокращения выкладок,

$$\theta' - 2\alpha = a \quad \text{и} \quad \frac{\beta^2 + \alpha(\theta' - \alpha)}{\beta} = b,$$

запишем уравнение второй кривой в декартовых координатах в следующем виде:

$$x^2 + y^2 = ax - by.$$

Это уравнение окружности, проходящей через начало координат, с центром в точке $x = \frac{a}{2}$, $y = \frac{b}{2}$. Ее диаметр поэтому равен

$$2\sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

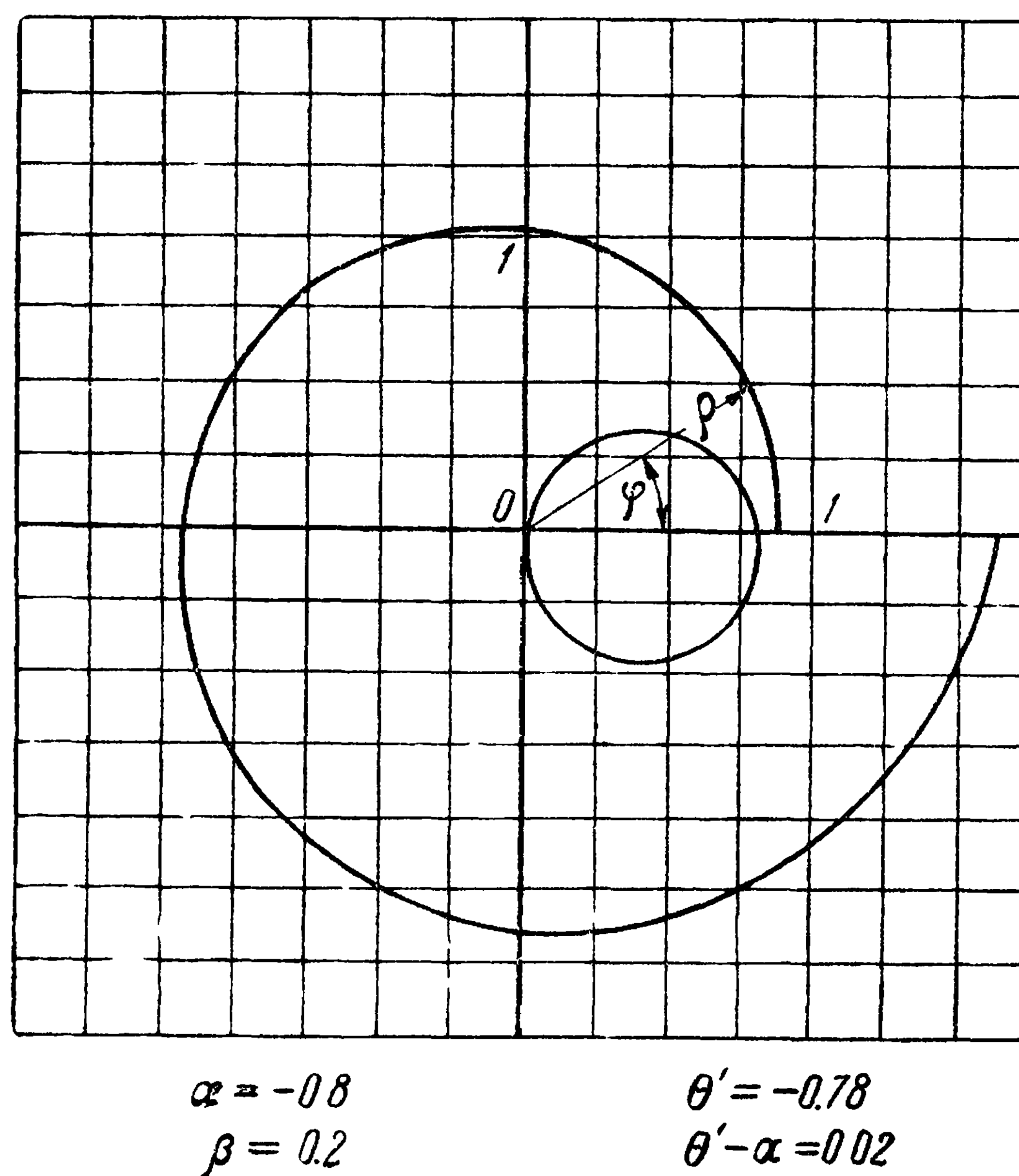
На фиг. 1 показаны эти кривые для случая

$$\alpha = -0.8, \quad \beta = 0.2, \quad \theta' = -0.78, \text{ т. е. } \theta' - \alpha = 0.02 > 0,$$

а на фиг. 2 эти же кривые показаны для случая

$$\alpha = -1.2, \quad \theta' = -1.25, \quad \beta = 1, \text{ т. е. } \theta' - \alpha = -0.05 < 0.$$

[5] (К стр. 94). Из этого текста видно, что Вышнеградский ясно понимал, что переходный процесс в системе при внезапном изменении нагрузки может не сопровождаться колебаниями, несмотря на то, что ее характеристическое уравнение имеет комплексные корни.

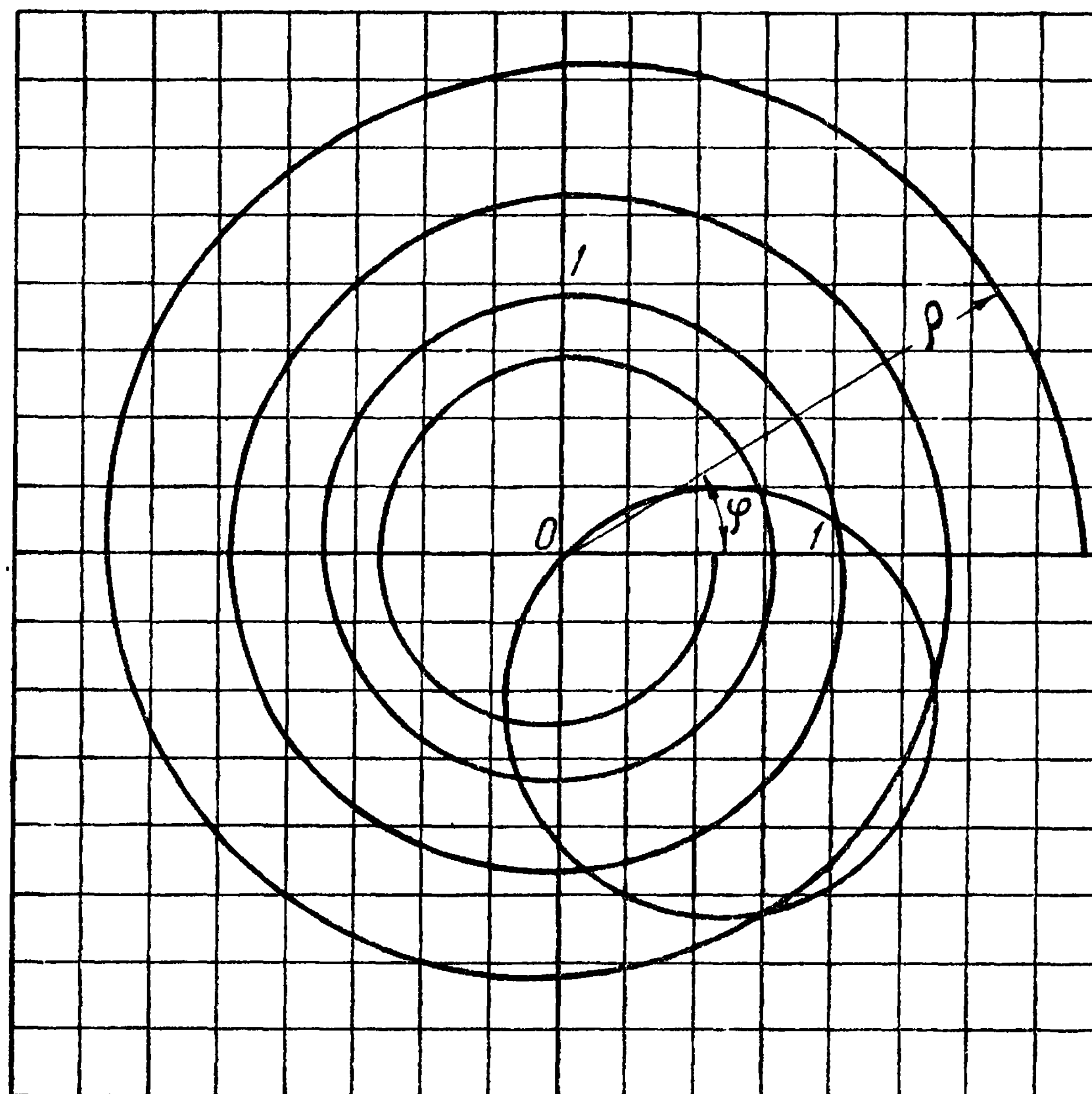


Фиг. 1

Позже отсутствие колебаний часто связывалось с фактом отсутствия у характеристического уравнения комплексных корней. В последние годы в этот вопрос внесена некоторая ясность, и публикуемый текст показывает, в какой мере Вышнеградский в понимании этих вопросов теории регулирования опередил свое время.

Отметим, что случай, когда рассматриваемая система имеет после внезапного изменения нагрузки колебания с

конечным числом размахов, в действительности не осуществляется и возможно лишь либо монотонное, т. е. не сопровождающееся колебаниями, изменение оборотов или же колебания с бесконечным числом размахов.



Фиг. 2.

Поясним теперь, как получаются приведенные далее в тексте условия. Пусть $r_1 = f_1(\varphi)$ есть уравнение окружности и $r_2 = f_2(\varphi)$ — уравнение спирали. Если спираль пересекает окружность в точках A и B, то, очевидно, по теореме о среднем значении, на дуге спирали AB и на дуге окружности AB должны быть точки, соответствующие одному и тому же значению $\varphi = \varphi_0$, в которых касательная к спирали

и касательная к окружности параллельны *. Уравнение для определения φ_0 получается из условия параллельности касательных:

$$\frac{f_1(\varphi_0)}{f_1'(\varphi_0)} = \frac{f_2(\varphi_0)}{f_2'(\varphi_0)}. \tag{A}$$

При этом возможны следующие случаи.

1) $f_2(\varphi_0) < f_1(\varphi_0)$,
2) $f_2(\varphi_0) = f_1(\varphi_0)$,
3) $f_2(\varphi_0) > f_1(\varphi_0)$.

В первом случае соответствующая $\varphi = \varphi_0$ точка спирали лежит, очевидно, внутри окружности, так как мы рассматриваем случай $\theta' - \alpha > 0$; таким образом, $f_2(\varphi)$ растет вместе с φ и при возрастании φ спираль и окружность непременно пересекутся. Во втором случае, при $\varphi = \varphi_0$, спираль касается окружности. Наконец в третьем случае точка спирали, соответствующая $\varphi = \varphi_0$, лежит вне окружности, и если есть наибольшее из значений между 0 и 2, удовлетворяющее уравнению (A), то при положительных значениях φ спираль не будет пересекать окружность.

Несложные выкладки показывают, что уравнение (A) в рассматриваемом случае имеет вид:

$$\cos\varphi_0 - \frac{\alpha}{\beta}\sin\varphi_0 = 0,$$

откуда

$$\varphi_0 = \operatorname{arc\,tg}\frac{\alpha}{\beta}, \quad \sin\varphi_0 = \pm\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}, \quad \cos\varphi_0 = \pm\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}.$$

---

* По теореме Лагранжа о конечном приращении на дуге спирали *AB* должны быть точки, соответствующие одному и тому же значению $\varphi = \varphi_0$, в которых касательная к спирали и окружности параллельны. Действительно, по теореме Лагранжа для функций $F(\varphi)$ имеем:

$$F(b) - F(a) = F'(\varphi_0)(b-a),$$

где

$$a < \varphi_0 < b.$$

Подставляя эти значения для $\sin\varphi_0$ и $\cos\varphi_0$ в уравнение окружности $r_1 = f_1(\varphi)$, получаем:

$$f_1(\varphi_0) = \mp\sqrt{\alpha^2+\beta^2}.$$

Следовательно, в выражении для $\sin\varphi_0$ и $\cos\varphi_0$ нужно брать нижний знак (так как радиус-вектор всегда положителен). Тогда первое и второе неравенства примут вид:

$$\frac{\alpha^2+\beta^2}{|\theta'|}\,e^{\frac{(\theta'-\alpha)}{\beta}\varphi_0} \leqslant \sqrt{\alpha^2+\beta^2},$$

а третье неравенство

$$\frac{\alpha^2+\beta^2}{|\theta'|}\,e^{\frac{(\theta'-\alpha)}{\beta}\varphi_0} > \sqrt{\alpha^2+\beta^2}.$$

Пусть угол, образованный радиусом-вектором к точке A, есть $\varphi = a$, а к точке B $\varphi = b$. Выберем $F(\varphi) = \ln r_1(\varphi) - \ln r_2(\varphi)$. Тогда, по теореме Лагранжа,

$$[\ln r_1(b) - \ln r_2(b)] - [\ln r_1(a) - \ln r_2(a)] =$$

$$= \left[\left(\frac{\frac{dr_1}{d\varphi}}{r}\right)_{\varphi=\xi} - \left(\frac{\frac{dr_2}{d\varphi}}{r}\right)_{\varphi=\xi}\right](b-a)$$

и так как $r_1(b) = r_2(b)$ и $r_1(a) = r_2(a)$ и $b - a \neq 0$, то

$$\left[\frac{\frac{dr_1}{d\varphi}}{r_1}\right]_{\varphi=\xi} = \left[\frac{\frac{dr_2}{d\varphi}}{r_2}\right]_{\varphi=\xi}$$

или для $\varphi = \xi$

$$\operatorname{tg}\psi_1 = \operatorname{tg}\psi_2,$$

где ψ_1 и ψ_2 — углы, которые образуют касательные к обеим кривым с радиусом-вектором, образующим угол φ_0 с полярной осью.

Принимая во внимание, что $\theta' - \alpha > 0$ и логарифмируя полученные неравенства, мы получим как условие наличия пересечения или касания спирали и окружности:

$$\varphi_0 = \operatorname{arc\,tg} \frac{\beta}{\alpha} \leqslant \frac{\beta}{\theta' - \alpha} \ln \frac{|\theta'|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

и как условие отсутствия пересечения:

$$\varphi_0 = \operatorname{arc\,tg} \frac{\beta}{\alpha} > \frac{\beta}{\theta' - \alpha} \ln \frac{|\theta'|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}\,.$$

Заметим, кроме того, что первое из этих неравенств не может быть осуществлено ни при каких значениях параметров, удовлетворяющих поставленным условиям. Действительно, $\operatorname{arc\,tg} \frac{\beta}{\alpha}$ есть положительное число между 0 и 2π. Так как по условию $\theta' - \alpha > 0$, то $|\theta'| < |\alpha|$ и, следовательно, $\frac{|\theta'|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} < 1$. Но тогда $\ln \frac{|\theta'|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$ отрицателен и так как $\beta > 0$, то вся правая часть отрицательна. Очевидно, неравенство невозможно, потому что левая его часть, как было сказано, положительна. Таким образом, в системе может быть или колебание с бесконечным числом размахов или монотонный процесс, не сопровождающийся колебаниями угловой скорости *. Процесса, сопровождающегося колебаниями угловой скорости с конечным числом размахов, в рассматриваемом случае не может быть.

[6] (К стр. 94). В работе Вышнеградского „О регуляторах прямого действия“ были приведены выражения **:

$$\theta' = \left[\sqrt[3]{z_1} + \sqrt[3]{z_2} - \frac{X}{3}\right]\sqrt[3]{\frac{KLg}{I\omega_0}}$$

---

* Напомним, что речь идет о переходном процессе, вызванном мгновенным сбросом нагрузки.

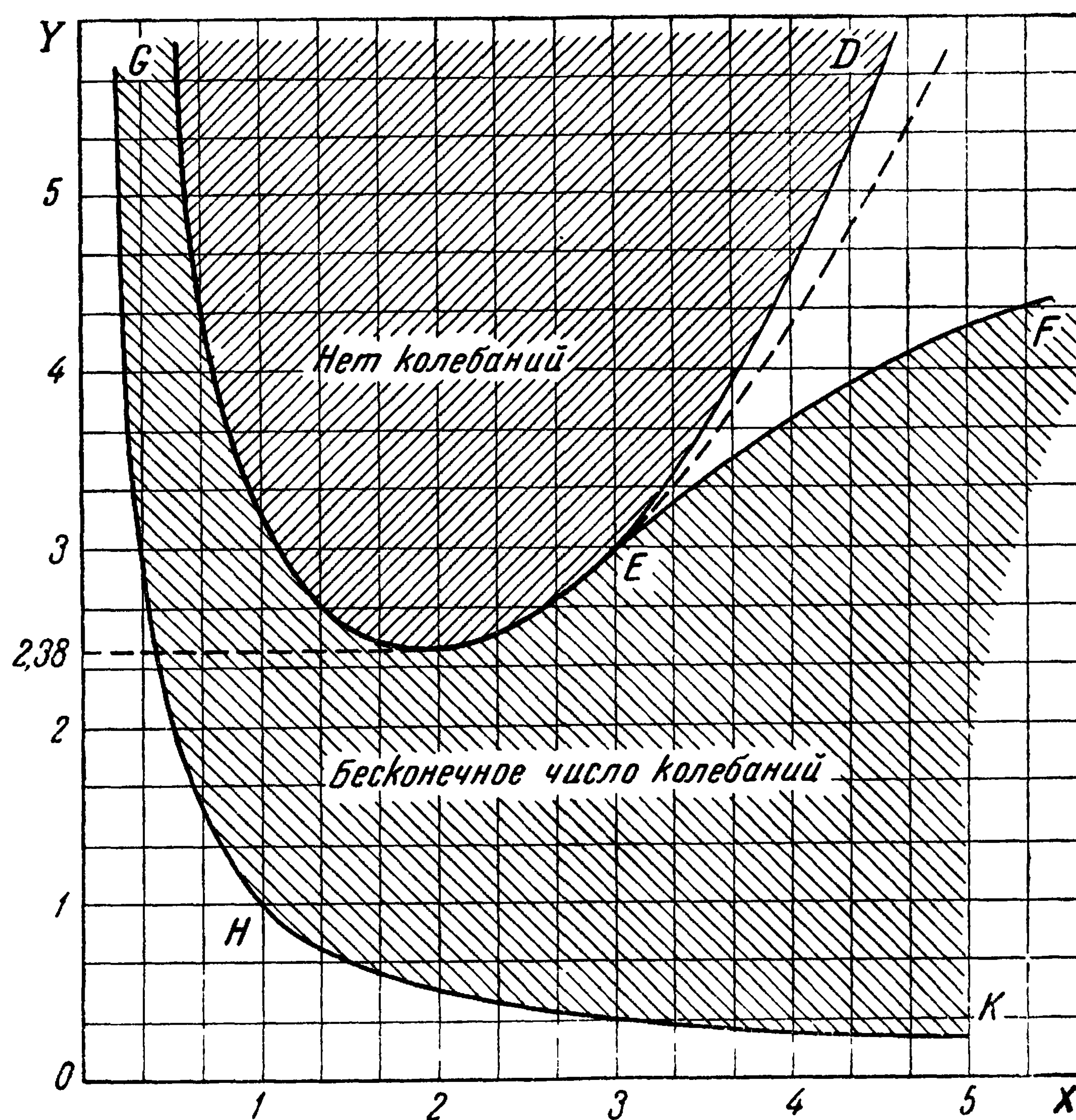
** См. стр. 62 этого тома.

и

$$\alpha = \left[-\left(\sqrt[3]{z_1} + \sqrt[3]{z_2} - \frac{X}{3} \right] \sqrt[3]{\frac{KLg}{I\omega_0}}$$

для действительного корня θ' и действительной части комплексного корня α характеристического уравнения третьей степени *:

$$\varphi^3 + x\varphi^2 + y\varphi + 1 = 0.$$



Фиг. 3

В этих выражениях z_1 и z_2 — корни вспомогательного квадратного уравнения

* Эти выражения легко получаются из формулы Кардана.

$$z^2+\left[\frac{2x^3}{27}-\frac{xy}{3}+1\right]z^2+\left[\frac{x^2}{9}-\frac{y}{3}\right]^3=0$$

и, следовательно,

$$z_1+z_2=-\left(\frac{2x^3}{27}-\frac{xy}{3}+1\right).$$

Сумма $\sqrt[3]{z_1}+\sqrt[3]{z_2}$ всегда имеет тот же знак, что и сумма z_1+z_2, если только z_1 и z_2 — действительные числа *.

Из приведенных выше выражений для θ' и α следует:

$$\theta'-\alpha=2\sqrt[3]{\frac{KL_g}{I\omega_0}}\left(\sqrt[3]{z_1}+\sqrt[3]{z_2}\right)$$

и, таким образом,

$$\theta'-\alpha<0, \text{ если } 2x^3-9xy+27>0$$

и

$$\theta'-\alpha>0, \text{ если } 2x^3-9xy+27<0.$$

[7] (К стр. 94). Кривая $2x^3-9xy+27=0$ изображена на фиг. 2. Области монотонного процесса и процесса, сопровождающегося колебаниями с бесконечным числом размахов, выделены на фиг. 3 различной штриховкой.

---

* Действительно, $a^3+b^3=(a+b)(a^2+2ab+b^2)$, но $(a^2+2ab+b^2)$ не отрицательно, если a и b — действительные числа.



КОММЕНТАРИИ
К РАБОТЕ А. СТОДОЛЫ „О РЕГУЛИРОВАНИИ ТУРБИН. I“

[1] (К стр. 102). Это допущение о пренебрежении массой регулятора и трением в нем является основным для работы Стодолы „О регулировании турбин. I“. Нужно было обладать тонким пониманием динамики регулирования, чтобы после работы Вышнеградского, более того, опираясь на работу Вышнеградского, сделать это допущение. Оно оправдано не только тем, что массы регулятора малы, а „энергия“ его велика, но еще и тем, что вредное влияние масс, которыми Стодола пренебрегает, считается компенсированным влиянием трения (в частности, вязкого), которое также не учитывается. В статье „Регулирование турбин. II“ Стодола дает детальный анализ влияния приведенной массы регулятора.

[2] (К стр. 102). Фарко изобрел жесткую обратную связь.

[3] (К стр. 103). Имеются в виду устройства, в которых перемещение чувствительного элемента включает прямую или реверсивную фрикционную муфту, соединяющую привод к заслонке с валом машины и позволяющую непосредственно перемещать заслонку за счет энергии регулируемой машины.

[4] (К стр. 103). *Мгновенно-действующим* Стодола называет сервомотор в том случае, если можно пренебречь его собственной постоянной времени, предположив, что положение поршня сервомотора всегда точно соответствует положению муфты

чувствительного элемента. Утверждение Стодолы, что такое предположение „весьма точно осуществляется в гидравлических сервомоторах“, не всегда верно, даже если иметь в виду сервомоторы, имеющие жесткую обратную связь.

[5] (К стр. 103). Если пренебречь постоянной времени сервомотора, имеющего жесткую обратную связь, массой чувствительного элемента и трением в нем, то заслонка будет точно следовать за смещением муфты регулятора, которая, в свою очередь, будет точно следовать за изменениями угловой скорости.

[6] (К стр. 105). Поясняя причины линеаризации задачи, метод линеаризации и обосновывая ее, Стодола следует идеям Вышнеградского.

[7] (К стр. 108). Активными (свободоструйными) турбинами называются такие, у которых удельная энергия жидкости при выходе из направляющего аппарата является целиком кинетической. Таким образом, давление перед входом в рабочее колесо равняется давлению на выходе из него.

[8] (К стр. 108). Скорость u на выходе из направляющего аппарата определится по уравнению Бернулли:

$$\frac{c^2}{2g}+\frac{p+p_a}{\gamma}=\frac{u^2}{2g}+\frac{p_a}{\gamma}+\zeta_0\frac{u^2}{2g},$$

где c — скорость в напорном трубопроводе.

Пренебрегая c по сравнению с u, получим $\frac{p}{\gamma}=\frac{u^2}{2g}(1+\zeta_0)$, откуда

$$u=\sqrt{\frac{2g}{1+\zeta_0}\frac{p}{\gamma}}.$$

[9] (К стр. 108). Гидравлический к. п. д. турбины оценивает величину потерь энергии на гидравлические сопротивления в турбине. Он равен отношению удельной энергии потока жидкости, превращенной на колесе в механическую работу, к удельной энергии жидкости при входе в турбину.

[10] (К стр. 107). Логарифмируя предыдущее выражение, получаем

$$\ln P = \ln u^3 + \ln f - \ln v + \ln \text{const},$$

что после дифференцирования дает:

$$\frac{dP}{P} = -\frac{dv}{v} + \frac{df}{f} + 3\frac{du}{u}.$$

После сделанной Стодолой замены имеем:

$$\frac{P-P_0}{P_0} = -\frac{v-v_0}{v_0} + \frac{f-f_0}{f_0} + 3\frac{u-u_0}{u_0};$$

но

$$\frac{v-v_0}{v_0} = x, \quad \frac{f-f_0}{f_0} = -\alpha_0 x \text{ (в силу уравнения 1а)}$$

и

$$\frac{u-u_0}{u_0} = \frac{1}{2}z\left[\text{в силу уравнения } u = u_0\left(1+\frac{1}{2}z\right)\right].$$

Подставляя эти значения, получаем:

$$\frac{P-P_0}{P_0} = -x - \alpha_0 x + \frac{3}{2}z = -(\alpha_0+1)x + \frac{3}{2}z.$$

[11] (К стр. 111). Здесь Стодола *впервые в истории теории регулирования* вводит в рассмотрение постоянные времени. После Стодолы, и это понятно, предложенные Стодолой обозначения T прочно вошли почти во все работы по теории регулирования и употребляются до настоящего времени.

[12] (К стр. 112). Напомним упрощения, которые принял Стодола при выводе этой системы уравнений. Рассматривая процесс регулирования активной турбины, Стодола здесь пренебрегает инерцией массы регулятора, трениями в регуляторе и запорных органах, процессом установления в сервомоторе (его постоянной времени), но учитывает инерцию турбины,

процесс установления в трубопроводе и процесс установления давления при наличии воздушного колпака. Все три рассматриваемых степени свободы относятся к турбине, к воздушному колпаку и к трубопроводу, а регулятор предполагается идеальным. Рассматривая процесс установления скорости в трубопроводе и давления в воздушном колпаке, Стодола пренебрегает распределенностью параметров этих систем, т. е. не учитывает волновых процессов и, в частности, явления гидравлического удара. Учет гидравлического удара привел бы Стодолу к трансцендентному характеристическому уравнению.

[13] (К стр. 113). Хотя проблема, которую рассматривает здесь Стодола, существенно отличается от той, которая интересовала Вышнеградского, Стодола упростил задачу так, что получил в результате характеристическое уравнение 3-й степени, которое только значениями коэффициентов отличается от соответствующего уравнения Вышнеградского.

[14] (К стр. 114). Случай, когда характеристическое уравнение имеет кратные корни, в рассматриваемой задаче не представляет интереса. Все коэффициенты уравнений определяются приближенно. Всегда можно исключить случай кратных корней, незначительно изменив значения коэффициентов уравнения.

[15] (К стр. 115). Поведение системы при росте отклонений координат зависит от вида нелинейных характеристик. Вообще говоря, теоретически возможно установление автоколебаний такой амплитуды, что запорный клапан не будет достигать крайних положений (упоров).

[16] (К стр. 117). Это неравенство соответствует условию Вышнеградского

$$xy > 1.$$

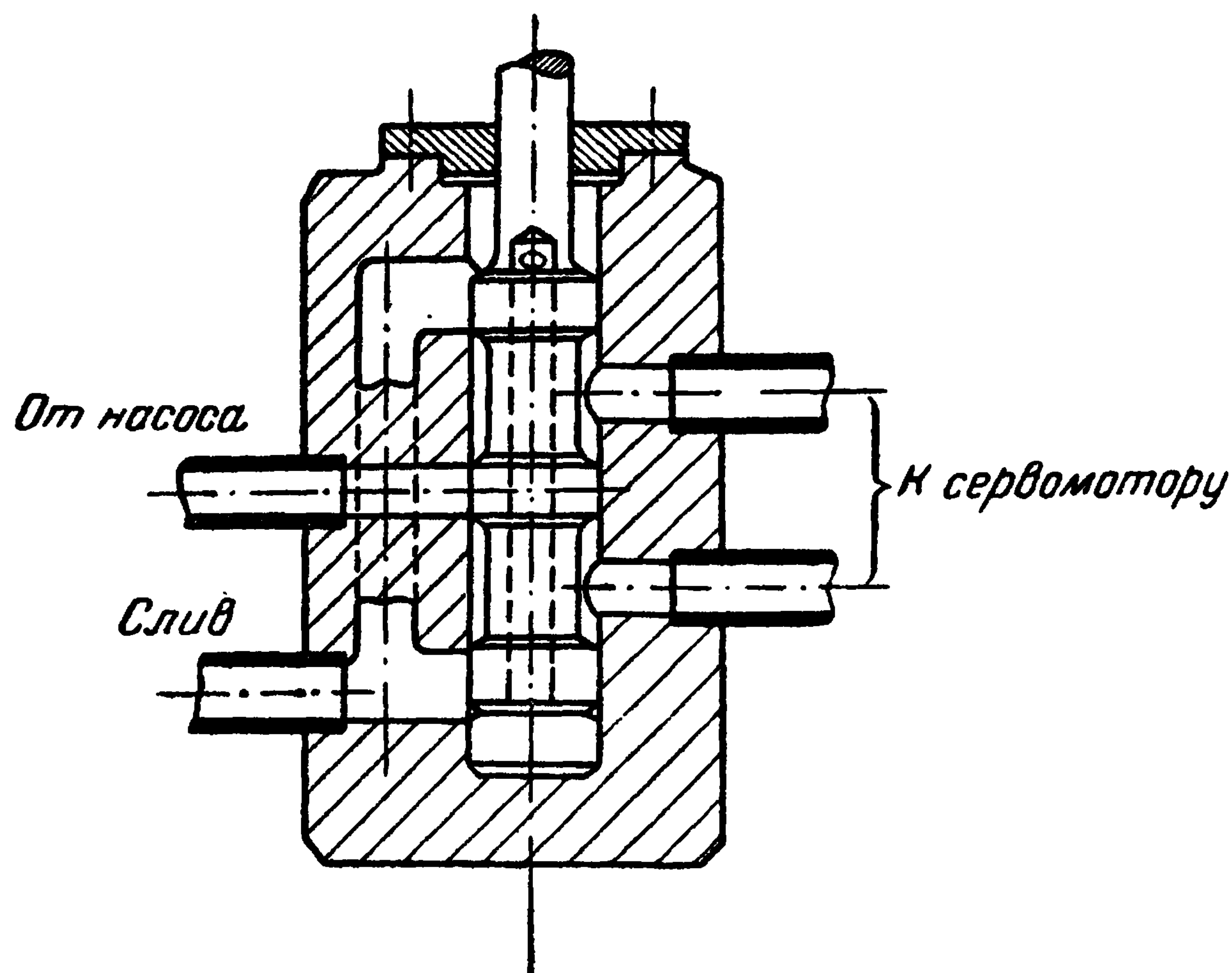
Уравнение

$$a\varphi^3 + b\varphi^2 + c\varphi + d = 0$$

при положительных *a*, *b*, *c* и *d* имеет все корни с отрицательными частями, если

$$bc > ad.$$

Используя (10), сразу получаем неравенства (18).



Фиг. 1

[17] (К стр. 118). Условие (19) соответствует неравенству Вышнеградского

$$y^2x^2 - 4(y^3 + x^3) + 18\,xy - 27 > 0,$$

а условие (18) — неравенству

$$xy > 1.$$

Из графика Вышнеградского видно, что кривая

$$x^2y^2 - 4(y^3 + x^3) + 18\,xy - 27 = 0$$

вся лежит *выше* гиперболы $xy = 1$.

[18] (К стр. 128). Примером такой конструкции может служить гидравлический сервомотор, имеющий золотник, показанный на фиг. 1. При смещении золотника, в силу несжи-

маемости жидкости, скорость поршня (точки S') равна

$$\frac{dS'}{dt}=\frac{\varnothing}{F}v,$$

где $\varnothing$ — проходное сечение, через которое масло втекает в цилиндр, F — площадь поршня, v — скорость масла.

Если пренебречь инерцией поршня и влиянием приложенных к поршню сопротивлений, то

$$v=\sqrt{\frac{2g}{\gamma}p},$$

где γ — удельный вес масла, а p — избыточное давление, под которым подводится масло к сервомотору. Поэтому приближенно

$$\frac{dS'}{dt}=\frac{\sqrt{\frac{2g}{\gamma}p}}{F}\varnothing.$$

Проходное сечение

$$\varnothing\equiv S-S'.$$

Таким образом,

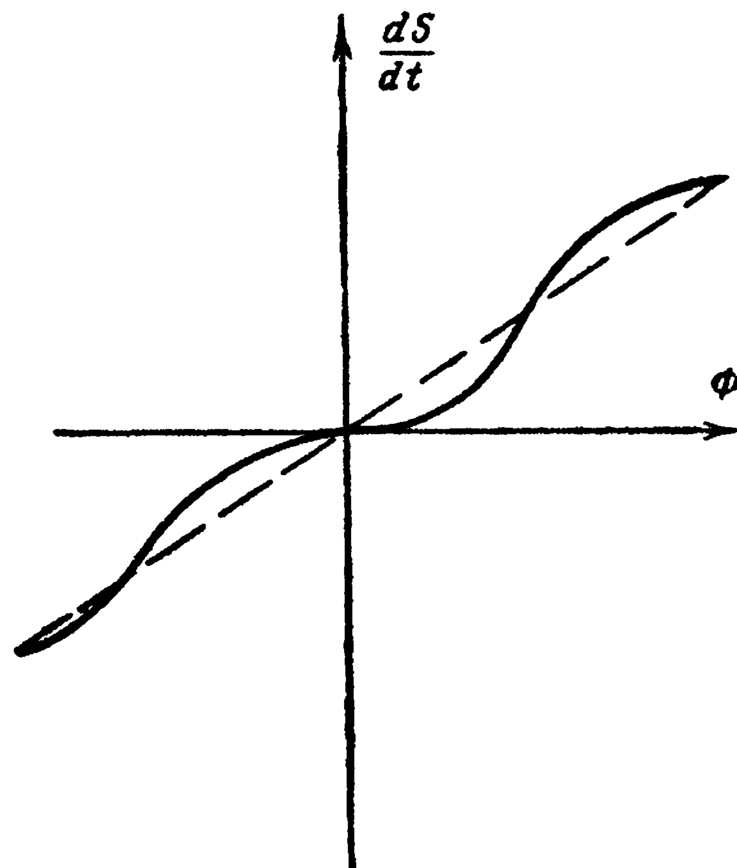
$$\frac{dS'}{dt}\equiv S-S'.$$

В этом месте Стодола впервые вводит в теорию регулирования линейное уравнение движения гидравлического сервомотора (30), до сих пор используемое в такой же форме.

До Стодолы теория рассматривала лишь сервомоторы с нелинейными характеристиками, что сильно усложняло задачу. Линеаризация уравнения сервомотора явилась тем шагом, который на много лет вперед определил основное направление развития теории непрямого регулирования. Стодола, смело

линеаризируя задачу, выступает здесь как прямой последователь Вышнеградского.

Существенно лишь следующее принципиальное различие в методе линеаризации задачи. Вышнеградский и Стодола в предыдущих выкладках линеаризируют задачу переходом к малым колебаниям, т. е. разлагая нелинейные функции в ряды и пренебрегая всеми членами рядов, кроме линейных. При выводе уравнения сервомотора Стодола *постулирует* линейные зависимости, вообще обходя исходные нелинейные характеристики. Это не случайная обмолвка Стодолы: он хорошо понимал трудности, связанные с линеаризацией характеристик сервомотора. До изобретения проточных золотников, благодаря влиянию перекрытия золотника, характеристика сервомотора всегда имела горизонтальную касательную в точке $\varnothing = 0$ (фиг. 2). Единственный способ линеаризации задачи в этом случае состоит в замене нелинейной характеристики не касательной, а секущей, так сказать „усредняющей" прямой.



Фиг. 2

Именно такую прямую, повидимому, имеет в виду Стодола, постулируя линейную характеристику у сервомотора.

[19] (К стр. 130). Здесь *впервые* вводится понятие о *времени сервомотора* T_0, до сих пор используемое в теории регулирования. Стодола употребляет вместо общепринятого теперь термина „время сервомотора" термин „продолжительность регулирования" или „время регулирования". При переводе мы будем, как правило, пользоваться современным термином.

[20] (К стр. 131). Эти уравнения отличаются от уравнений

(6) лишь учетом процесса установления сервомотора. В остальном сохраняется старая идеализация (см. комментарий 12). В частности, как и ранее, не учитываются волновые явления в трубопроводах.

[21] (К стр. 132). Отказавшись от анализа характеристического уравнения 4-й степени, Стодола упростил задачу так, чтобы получить уравнение 3-й степени, т. е. свести задачу в ее математической части к задаче Вышнеградского.

[22] (К стр. 140). Турбины Жирара являются одной из разновидностей активных турбин со свободной струей. Согласно теории, окружная скорость последних на оптимальном режиме (т. е. когда теоретический к. п. д. равен единице) равняется половине абсолютной скорости истечения:

$$v_0 = \frac{u}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2gH},$$

где H — полный напор.



КОММЕНТАРИИ К РАБОТЕ А. СТОДОЛЫ „О РЕГУЛИРОВАНИИ ТУРБИН. II"

[1] (К стр. 149). Стодола говорит здесь о работе Вышнеградского как о хорошо известной, а о Вышнеградском — как о своем предшественнике.

[2] (К стр. 154). Это верно лишь для сил вязкого трения. Силы сухого (кулоновского) трения имели существенно другой характер.

[3] (К стр. 154). Здесь, так же как и при выводе уравнения сервомотора, Стодола линеаризирует характеристику катаракта не строгим переходом к малым колебаниям, что обычно невозможно, так как касательная к характеристике при скорости, равной нулю, горизонтальна, а заменяет нелинейную функцию усредняющей прямой.

[4] (К стр. 158). Это утверждение Стодолы неверно. Максвелл в 1868 г. на заседании Лондонского Математического Общества поставил эту проблему, сообщив, что сам смог найти решение лишь для $n = 3$. В 1874 г. задача была решена Раутом для $n = 4$ и $n = 5$.

В 1877 г. Раут дал алгоритм, позволяющий решить эту проблему для любого n.

Стодола, повидимому, не знал в 1893 г. ни о работе Максвелла, ни о диссертации Раута.

[5] (К стр. 158). см. „Mathematische Annalen" B. 46. 1895.

[6] (К стр. 167). В этом случае в уравнениях (71) надо положить

$$T'=T_0=T_3=0$$

и, в соответствии с (73),

$$\alpha_0=\frac{\psi}{\delta_0}.$$

Тогда уравнения (71) сводятся к виду:

$$\left.\begin{aligned} &T_2\frac{d^2w'}{dt^2}+\delta_0 w'-x=0,\\ &T_1\frac{dx}{dt}+x-3y-2\psi w'=\Pi,\\ &T_2\frac{dy}{dt}+2(y+\psi w')=0. \end{aligned}\right\}$$

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$\begin{vmatrix} T^2p^2+2 & -1 & 0\\ -2\psi & T_1p+1 & -3\\ 2\psi & 0 & T_2p+2 \end{vmatrix}=$$

$$\begin{aligned} &=(T_2p+\delta_0)\,[(T^2p^2+\delta)\,(T_1p+1)-2\psi]+6\psi=\\ &=T^2T_1T_2p^4+(T^2T_2+2T^2T_2)\,p^3+\\ &+(2T^2+T_1T_2\delta)\,p^2+(2T_1\delta+T_2\delta-2\psi T_2)\,p+\\ &+(2\delta-2\psi+6\psi)=0, \end{aligned}$$

и, если пренебречь δ по сравнению с ψ,

$$T^2T_1T_2p^4+T^2(2T_1+T_2)\,p^3+(2T^2+T_1T_2\delta)\,p^2+ \\ +2\,(T_1\delta-2\psi T_2)\,p+4\psi=0.$$

В этом случае

$$a=T^2T_1T_2;\qquad b=T^2(2T_1+T_2);$$

$$C=(2T^2+T_1T_2\delta); \qquad d=2(T_1\delta+2\psi T_2).$$

Условие

$$(bc-ad)\,d-b^2e>0$$

сводится к виду:

$$2(T_1-2\psi T_2)[T^2(2T_1+T_2)(2T^2+T_1T_2\delta)-$$
$$-2T^2T_1T_2(T_1\delta-2\psi T_2)]-T^4(2T_1+T_2)^2 4\psi=$$
$$=2T_2^4\left(\frac{T_1}{T_2}-2\psi\right)\left[T^2\left(2\frac{T_1}{T_2}+1\right)\left(2\frac{T^2}{T_2^2}+\frac{T_1}{T_2}\delta\right)-\right.$$
$$\left.-2T^2\frac{T_1}{T_2}\left(\frac{T_1}{T_2}\delta-2\psi\right)\right]-T^4T_2^2\left(2\frac{T_1}{T_2}+1\right)^2 4\psi>0,$$

или

$$2\left(\frac{T_1}{T_2}-2\psi\right)\left[\left(2\frac{T_1}{T_2}+1\right)\left(2\frac{T_1}{T_2^2}+\frac{T_1}{T_2}\delta\right)-\right.$$
$$\left.-2\frac{T_1}{T_2}\left(\frac{T_1}{T_2}\delta-2\psi\right)\right]-\left(\frac{T}{T_2}\right)^2\left(2\frac{T_1}{T_2}+1\right)^2 4\psi>0,$$

или же

$$\Delta=A\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^3+B\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2+C\left(\frac{T_1}{T_2}\right)+D>0,$$

где

$$A=0,$$
$$B=\psi\left(\frac{T}{T_2}\right)^2\left[-\left(\frac{T}{T_2}\right)^2+\frac{\delta_0}{2}\right],$$
$$C=-\psi\left(\frac{T}{T_2}\right)^2\left[2\left(\frac{T}{T_2}\right)^2+\frac{\psi}{2}\right],$$
$$D=-\frac{3}{4}\psi\left(\frac{T}{T_2}\right)^4.$$

Этим примером Стодола показывает существование установок автоматического регулирования, которые могут быть сделаны устойчивыми при учете массы чувствительного элемента и при пренебрежении трением в чувствительном элементе.

[7] (К стр. 167). В этом случае уравнения движения имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} &T^2\frac{d^2w'}{dt^2}+\delta_0 w'-x=0,\\ &T_0\frac{dw}{dt}+w-\delta_0 w'=0,\\ &T_1\frac{dx}{dt}+\alpha_0 w+x=\Pi, \end{aligned}\right\}$$

а характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} Tp^2+\delta & -1 & 0\\ -\delta_0 & 0 & T_0p+1\\ 0 & T_1p+1 & \alpha_0 \end{vmatrix}=$$

$$=+(T^2p^2+\delta)(T_1p+1)(T_0p+1)+\delta_0\alpha_0=0.$$

[8] (К стр. 168). В этом случае уравнения движения

$$\left.\begin{aligned} &T^2\frac{d^2w'}{dt^2}+T'\frac{dw'}{dt}+\delta_0 w'-x=0,\\ &w=\delta_0 w',\\ &T_1\frac{dx}{dt}+\alpha_0 w+x=0,\\ &\alpha_0=\frac{\psi}{\delta_0}. \end{aligned}\right\}$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} T^2p^2+T'p+\delta_0 & -1\\ \psi & T_1p+1 \end{vmatrix}=$$

$$=(T^2p^2+T'p+\delta_0)(T_1p+1)+\psi=$$

$$=T^2T_1p^3+(T^2+T_1T')p^2+(T'+T_1\delta_0)p+(\psi+\delta)=0.$$

[9] (К стр. 169). Здесь Стодола доказывает возможность устойчивого регулирования астатическим регулятором. Следует иметь в виду, что в отличие от случая, рассмотренного Вышнеградским, Стодола имеет дело с объектом, имеющим

самовыравнивание. Впервые это было показано Максвеллом в его работе „О регуляторах“. Максвелл также предполагал наличие самовыравнивания.

[10] (К стр. 170). Стодола вновь возвращается к работе Вышнеградского, для того чтобы подчеркнуть, что работа Вышнеградского во многом лежала в основе его исследований.

[11] (К стр. 171). В этом случае уравнения движения

$$\left.\begin{aligned} &T' \frac{dw'}{dt} + \delta_0 w' - x = 0, \\ &w = \delta_0 w', \\ &T_1 \frac{dx}{dt} + \alpha_0 w + x - \frac{3}{2} z = \Pi, \\ &T_2 \frac{dy}{dt} + z = 0, \\ &-\alpha_0 w - y + \frac{1}{2} z = 0, \\ &\alpha_0 = \frac{\psi}{\delta_0}, \end{aligned}\right\}$$

и характеристическое уравнение имеет вид:

$$\begin{vmatrix} T'p + \delta_0 & -1 & 0 \\ -2\psi & T_1 p + 1 & -3 \\ 2\psi & 0 & T_2 p + 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (T'p + \delta_0)(T_1 p + 1)(T_2 p + 2) + 6\psi - 2\psi(T_2 p + 2) =$$
$$= T'T_1T_2 p^3 + (2T'T_1 + T'T_2 + \delta T_1 T_2) p^2 +$$
$$+ 2[T' + \delta_0 T_1 - \psi T_2] p + 2\psi = 0$$

(в свободном члене пренебрежено δ по сравнению с ψ).

[12] (К стр. 172). Такая поверхность является естественным развитием графика Вышнеградского на трехмерные образы.

[13] (К стр. 173). Стодола поступает вполне подобно Вышнеградскому: опуская всюду в своем исследовании силы сухого трения и учитывая только катаракт, он утверждает, что силы

сухого трения „играют роль катаракта". Стодола, повидимому, не был знаком с работой Леоте* и не знал, что в некоторых случаях сухое трение может быть *причиной генерации колебаний.*

[14] (К стр. 174). Хотя все исследование Стодолы посвящено вопросам устойчивости, здесь Стодола касается оценки переходного процесса.

[15] (К стр. 175). Применительно к регулированию гидравлических турбин из факторов, опущенных Стодолой, наибольшее значение имеют волновые процессы в трубопроводах, т. е. явления гидравлического удара.

* H. Léaute. Mémoires sur les oscillations à longues periodes dans les maschines actionnées par des moteurs hydrauliques. „Journal de lEcole politechnique", LV, 1885.



КОММЕНТАРИИ К РАБОТЕ А. СТОДОЛЫ „ПРИНЦИП РЕГУЛИРОВАНИЯ СИМЕНСОВ И АМЕРИКАНСКИЕ ИНЕРЦИОННЫЕ РЕГУЛЯТОРЫ“

[1] (К стр. 180). Рассматриваемый здесь дифференциальный регулятор Сименсов существенно отличается от тех дифференциальных регуляторов К. В. Сименса, которые рассматривались Максвеллом (см. комментарии к работе Максвелла).

Существенная особенность рассматриваемого здесь регулятора состоит в том, что перемещения регулирующего органа не зависят от значения регулируемой координаты, т. е. от значений угловой скорости, а зависят исключительно от скорости изменения регулируемой координаты во времени, т. е. от ускорения главного вала машины.

Позже появились плоские регуляторы, которые получили название инерционных, так как в них перемещение муфты зависит и от *тангенциального* ускорения грузов, т. е. от углового ускорения вала машины.

В отличие от инерционного регулятора Сименсов, в плоских инерционных регуляторах муфта перемещается в зависимости не только от углового ускорения вала, но и от его угловой скорости. В связи с этим плоский регулятор является как бы комбинацией центробежного регулятора Уатта и описываемого здесь чисто инерционного регулятора Сименсов.

[2] (К стр. 182). В связи с тем, что в этом случае вращение вала A вообще не передавалось бы валу K.

[3] (К стр. 183). Подобного рода регулятор рассмотрен Максвеллом в работе, помещенной в этом томе.

[4] (К стр. 184). Здесь Стодола впервые устанавливает понятие принципа регулирования Сименсов (регулирование по скорости отклонения регулируемой координаты или, как говорят иногда, регулирование по производной).

[5] (К стр. 182). Имеется в виду распределительный эксцентрик паровой машины.

[6] (К стр. 184). Конструкции таких регуляторов Стодола подробно описывает далее, в конце статьи.

[7] (К стр. 187). Точнее: учет переносного движения можно исключить, добавив к внешним силам силы инерции, обусловленные переносным ускорением и кориолисовым ускорением.

[8] (К стр. 187). Т. е. систему координат, по отношению к которой рассматривается относительное движение.

[9] (К стр. 201). На верхнем чертеже фиг. 6 изображена, по существу, фазовая плоскость рассматриваемой системы. Стодола заранее постулирует, что колебания могут быть только синусоидальные, и что на границе устойчивости каждое мгновенное значение избыточной перестановочной силы уравновешивается мгновенным значением сил сопротивления (катаракта).

[10] (К стр. 202). Этот замечательный результат, полученный Стодолой, связан с тем, что плоский регулятор осуществляет *одновременное* регулирование по угловой скорости (действие центробежных сил инерции!) и по угловому ускорению (действие тангенциальных сил инерции!).

[11] (К стр. 205). Наименования, которые вводит здесь Стодола для постоянных времени, вошли затем во все курсы теории регулирования.

[12] (К стр. 206). Неравенство (12а) является естественным обобщением на случай, рассматриваемый Стодолой, известного неравенства Вышнеградского $XY>1$.

Заметим, что неравенство (12а) может быть удовлетво-

рено даже при $\delta \leqslant 0$, хотя регулируемый объект лишен самовыравнивания. В этом отношении инерционный регулятор существенно отличается от обычного регулятора Уатта, рассмотренного Вышнеградским, так как отсутствие статизма регулятора (или даже его отрицательный статизм) может компенсироваться тем, что регулятор, кроме угловой скорости, реагирует также и на угловое ускорение.

Несомненно интересно, что условия устойчивости (12а) Стодола здесь получает, обходя анализ дифференциальных уравнений; однако далее будет видно, в какой мере обычный прием, связанный с анализом дифференциальных уравнений, упрощает исследование.

[13] (К стр. 208). Это предположение Стодолы соответствует при аналитическом решении задачи предположению о „малой нелинейности", т. е. учету только первой гармоники того негармонического периодического движения, которое имеет место при учете сухого трения.

[14] (К стр. 209). Здесь Стодола впервые указывает и физически разъясняет так называемое явление „линеаризации" кулоновского трения при накладывании на основное движение дополнительных вибраций. Эта мысль Стодолы долгое время оставалась забытой и непонятой. В последнее время, независимо от работы Стодолы, она нашла свое выражение в установке специальных вибраторов на регулирующих устройствах. Это, в свою очередь, вызвало интерес к теории вопроса.

[15] (К стр. 220). Рассматривая задачу, существенно отличающуюся от той, которой занимался Вышнеградский, Стодола не только следует методу Вышнеградского, но и в окончательном уравнении (25) использует его обозначения.



ПОСЛЕСЛОВИЕ

Подготовка к печати классических работ по теории автоматического регулирования была начата мною совместно с членом-корреспондентом Академии Наук СССР И. Н. Вознесенским. Вместе с ним были отобраны работы, подлежащие опубликованию, была в основном закончена статья „О работах Д. Максвелла, И. Вышнеградского и А. Стодолы в области теории регулирования машин" и было приступлено к составлению примечаний.

После неожиданной смерти Ивана Николаевича эту работу пришлось заканчивать мне и на мне лежит в связи с этим ответственность как за подготовку к печати публикуемых работ, так и за материалы, включенные в добавление.

Публикуемые здесь классические работы являются лишь частью материалов, подготовленных к печати Институтом Автоматики и Телемеханики Академии Наук СССР. Работы, связанные с нелинейными задачами теории автоматического регулирования, предполагается издать отдельным томом.

В подготовке этих материалов к печати и в составлении комментариев приняли участие: М. А. Айзерман, Г. В. Аранович, Е. А. Леонтович, А. Г. Майер и Ю. И. Неймарк.

Особо отмечаю помощь, оказанную мне А. В. Храмым, в сборе биографических и библиографических материалов, в том числе и ранее неизвестных.

А. А. Андронов

Горький,
30 июля 1948 г.



ОГЛАВЛЕНИЕ

*

Стр.

Д. К. Максвелл. О регуляторах 9

И. А. Вышнеградский. Об общей теории регуляторов 33

И. А. Вышнеградский. О регуляторах прямого действия 43

И. А. Вышнеградский. Дополнение к работе „О регуляторах прямого действия" 89

А. Стодола. О регулировании турбин. I 101

А. Стодола. О регулировании турбин. II 147

А. Стодола. Принцип регулирования Сименсов и американские инерционные регуляторы 177

ПРИЛОЖЕНИЯ

А. А. Андронов и И. Н. Вознесенский. О работах Д. К. Максвелла, И. А. Вышнеградского и А. Стодолы в области теории регулирования машин 253

Отчет о выступлениях И. А. Вышнеградского и А. В. Гадолина на заседании II Отдела Императорского Русского Технического Общества 8 января 1877 г. 302

В. Л. Кирпичев. Иван Алексеевич Вышнеградский как профессор и ученый 307

Джемс Клерк Максвелл (1831—1879). (Краткий биографический очерк) 323

Список работ Д. К. Максвелла 330
Иван Алексеевич Вышнеградский (1831—1895) (Краткий биографический очерк) 339
Список работ И. А. Вышнеградского 348
Аурель Стодола (1859—1942). (Краткий биографический очерк) 353
Список работ А. Стодолы 363
Комментарии к работе Д. К. Максвелла „О регуляторах“ 369
Комментарии к работам И. А. Вышнеградского „Об общей теории регуляторов“ и „О регуляторах прямого действия“ 392
Комментарии к работе И. А. Вышнеградского „Дополнение“ . . . 400
Комментарии к работе А. Стодолы „О регулировании турбин. I“ 411
Комментарии к работе А. Стодолы „О регулировании турбин. II“ 419
Комментарии к работе А. Стодолы „Принцип регулирования Сименсов и американские инерционные регуляторы“ . . . 425
Послесловие 428

Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Академии Наук СССР

*

Редактор издательства *М. А. Айзерман*
Технический редактор *М. Л. Темерлин*
Корректор *М. Н. Богоявленская*

*

РИСО АН СССР № 3350. А-02622. Издат. № 1607.
Тип. заказ № 2045. Печ. л. 27+5 вкл.
Подп. к печ. 11/II 1949 г. Формат бум. 70×92¹/₁₆
Уч.-издат. 19,5. Тираж 3000.

2-я тип. Издательства Академии Наук СССР
Москва, Шубинский пер., д. 10

ТЕОРИЯ
АВТОМАТИ-
ЧЕСКОГО
РЕГУЛИ-
РОВАНИЯ





20 руб.